THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE SPECIALITE

(TROISIEME CYCLE DE PHYSIQUE DES MILIEUX IONISES)

PAR

GUY PELLETIER

ETUDE DES ONDES DE DERIVE ET DE LEUR STABILISATION PAR UN CHAMP HAUTE FREQUENCE

Soutenue le Octobre 1972 devant la Commission d'Examen

MM. JM DOLIQUE — Président

P ROLLAND
F ZADWORNY
} Examinateurs

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR DE SPECIALITE

(TROISIEME CYCLE DE PHYSIQUE DES MILIEUX IONISES)

PAR

GUY PELLETIER

ETUDE DES ONDES DE DERIVE ET DE LEUR STABILISATION PAR UN CHAMP HAUTE FREQUENCE

Soutenue le Octobre 1972 devant la Commission d'Examen

MM. JM DOLIQUE — Président

P ROLLAND, F ZADWORNY — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

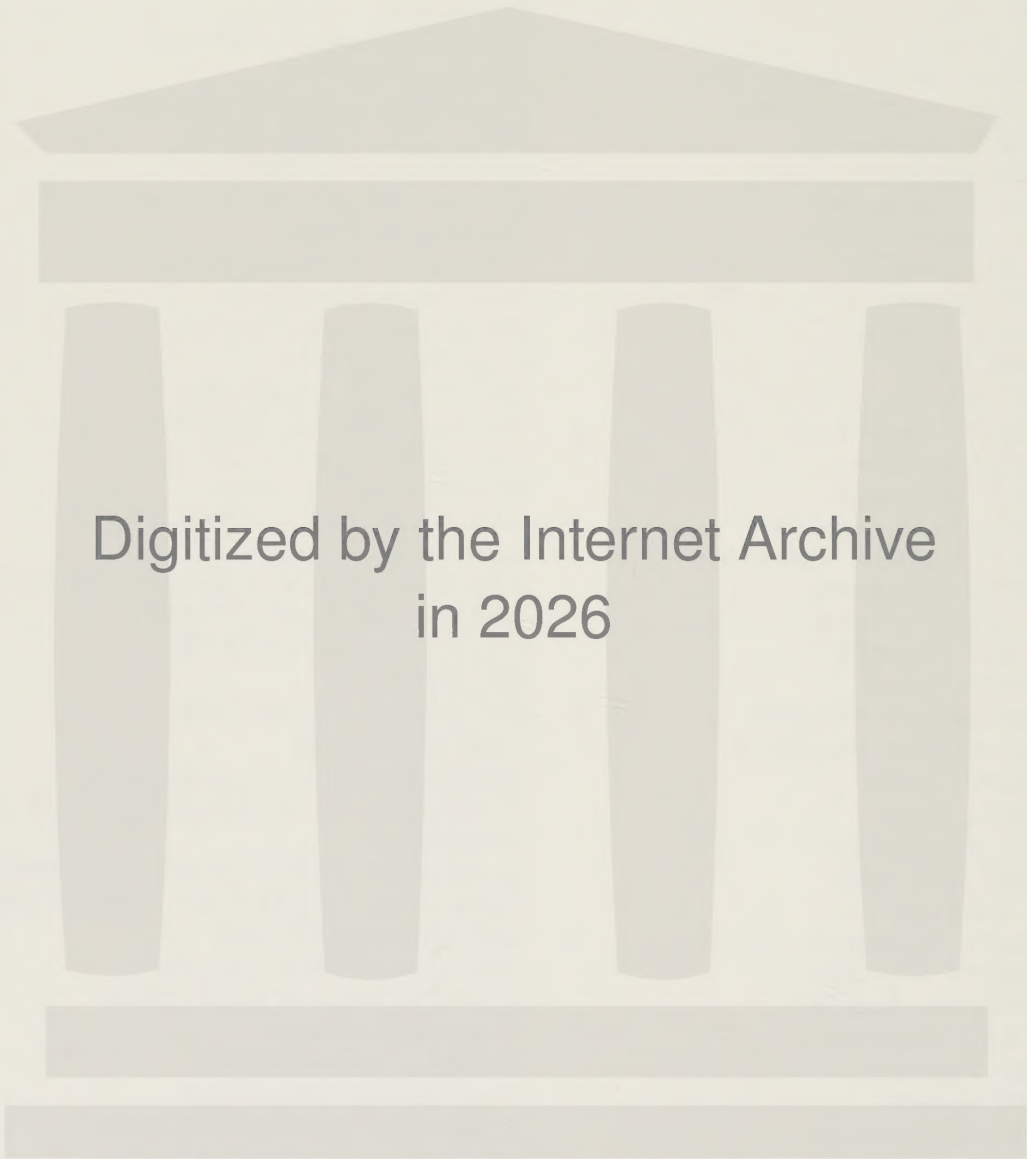
UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infcetieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et Pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544313_0036

MM	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	Klein Joseph	Mathématiques pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Réné	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de Pédiatrie et de Puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des Fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie générale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et Chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMANS Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique

MM	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et Organogenèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	Dussaud René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et Obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)

MM	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	SHAN Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP-
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 16 Novembre 1971

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Monsieur le Professeur J.M. DOLIQUE qui m'a fait l'honneur de patroner cette thèse et d'en présider le jury, à Monsieur T. CONSOLI, chef du Service d'Ionique Générale au C.E.N.G., qui m'a accueilli dans son service afin que j'y effectue ces travaux de recherche, à Monsieur P. ROLLAND, théoricien au S.I.G., qui a dirigé cette thèse avec beaucoup d'attention et de suggestions fructueuses, à Monsieur D. LEPESHINSKY, théoricien au S.I.G., dont les conseils et les encouragements me furent précieux, à Monsieur R. LEGARDEUR, chef du groupe "stabilisation HF", qui m'a engagé pour faire cette thèse et qui a su créer dans le groupe une atmosphère tout à fait favorable à la recherche, à Messieurs A. DUFAYET et M. MORESCO du groupe "stabilisation HF", dont la collaboration et l'amitié contribuèrent à mener à bien ce travail, à Monsieur F. ZADWORNY, maître de Conférence, de qui je jarde un bon souvenir du temps au j'étais son éléve, et qui a bien voulu faire partie du jury, et enfin à Madame MOUVET qui a accepté la tâche ingrate de dactylographier cette thèse.

Guy PELLETIER

Thèse de 3è Cycle

PHYSIQUE DES MILIEUX IONISES

SUJET

Etudes des Ondes de Dérive et de leur Stabilisation par un Champ Haute Fréquence

PLAN.

- Remerciements
- Introduction
- Notations
- I. Equation des ondes électrostatiques basse fréquence. Etude de la stabilité. Effet d'un gradient de pression H F.

I.1. Méthode mathématique utilisée pour la description microscopique.
1.1. Résolution de l'équation de VLASOV linéarisée.
1.2. Illustration de la méthode sur des exemples simples.

I.2. Ondes quasiélectrostatiques dans un magnétoplasma chaud inhomogène ($\beta \underset{\sim}{>} 0$).
2.1. Equation des ondes basse fréquence. Modes propres.
2.2. Ondes de dérive diamagnétique et ondes pseudo-sonores.
2.2.1. Discussion de la stabilité en régine non collisionnel.
2.2.2. Discussion de la stabilité en régime collisionnel. Résultats numériques sur les données de l'expérience Phaéton. Confrontations aux résultats expérimentaux.

I.3. Effet d'un gradient de pression H F sur l'instabilité de dérive diamagnétique.

- Conclusion de la première partie.

- II. Interaction d'un champ électrique H F parallèle aux lignes de forces magnétiques avec les ondes B F.

II.1. Etude non collisionnelle (Théorie microscopique).

II.2. Etude collisionnelle. Comparaison entre théorie microscopique et théorie macroscopique.

- Conclusion de la seconde partie.
- Conclusion générale.
- Références.

INTRODUCTION.

Il est bien connu que les instabilités de dérives collisionnelles et non collisionnelles, qui prennent naissance dans une colonne de magnétoplasma inhomogène, s'accompagnent d'une diffusion anormale de particules à travers les lignes de champ magnétique. Ces ondes sont donc particulièrement dangereuses pour le confinement du plasma et leur stabilisation est d'un intérêt primordial.

Le service d'Ionique Générale du Département de la Physique des Plasmas et de la Fusion Contrôlée du C.E.A. s'est penché sur cette étude depuis quelques années; en particulier depuis trois ans, un groupe s'est constitué pour étudier un procédé de stabilisation de la dérive par application d'un champ haute fréquence, à la suite d'un travail théorique de Mrs D. LEPESCHENSKY et P. ROLLAND (1). C'est ainsi que Mr R. LEGARDEUR a lancé le programme expérimental "Phaéton".

Ce programme expérimental a rendu nécessaire une connaissance plus approfondie des instabilités basse fréquence dans une colonne de plasma, en particulier des conditions à remplir pour qu'elles apparaissent et l'influence de divers facteurs entrant en jeu dans l'expérience. De plus, il a été nécessaire de compléter la théorie amorcée par Mrs D. LEPESCHENSKY et P. ROLLAND et d'en étudier le prolongement à un plasma non collisionnel. Tel est en résumé l'objet de cette thèse.

Mis à part le chapitre où est reprise la théorie macroscopique de D. LEPESCHENSKY et P. ROLLAND l'étude théorique a été faite à partir de l'équation de VLASOV, pour ce qui est du régime non collisionnel, et l'équation de VLASOV complétée par le terme de KROOK, pour ce qui est du régime collisionnel.

NOTATIONS.

- L'indice "a" désigne le type de particule : l'électron "e" ou l'ion "i".

- q_a : la charge de la particule de l'espèce "a".

- m_a : la masse.

- Ω_a : la pulsation cyclotronique.

- $C_a = \left(\frac{K\,Ta}{m_a} \right)^{1/2}$ = la vitesse thermique.

- $\rho_a = \frac{C_a}{|\Omega_a|}$ = le rayon de Larmor moyen.

- $C_s = \left(\frac{K\,Te}{m_i} \right)^{1/2}$ = la vitesse pseudosonore des ions

- $\rho_s = \frac{C_s}{|\Omega_i|}$ = le rayon de Larmor moyen des ions à la température électronique.

- ω_{pa} = la fréquence plasma.

- υ_a = la fréquence de collision.

- $D = \frac{KTe_{//}}{m_e \upsilon_{e//}}$ = le coefficient de diffusion des électrons.

- $\omega_* = \frac{m}{r} \frac{C_{e//}^2}{\Omega_e} \frac{1}{n} \frac{\delta n}{\delta r}$ = la pulsation diamagnétique.

- I -

EQUATION DES ONDES ELECTROSTATIQUES BASSE FREQUENCE.

ETUDE DE LA STABILITE

EFFET D'UN GRADIENT DE PRESSION H F

I.1. Méthode mathématique utilisée pour la description microscopique.

La théorie des distributions de Laurent SCHWARTZ (2) peut rendre de nombreux services en physique, en particulier en physique des plasmas. Elle apporte commodité et rigueur en ce sens qu'elle permet de faire des approximations impossibles en théorie des fonctions, mais qui répondent aux exigences de la physique, grâce aux propriétés topologiques des espaces de distributions.

Des approximations du genre, plasma froid, plasma tiède, rayons de Larmor petits, etc, ne peuvent être faites sur les fonctions de distribution des vitesses; on est obligé de faire des développements en fin de calcul. En fait nous pouvons faire ces approximations dès le début des calculs en utilisant des distributions, au sens mathématique du terme.

Mais cette simplification des calculs nécessite un effort d'abstraction.

1.1. Résolution de l'équation de VLASOV linéarisée.

Il est coutume, en physique des plasmas, de décrire les phénomènes à l'aide d'une fonction de répartition des vitesses f, qui à chaque fonction ϕ des vitesses des particules (grandeur microscopique) permet d'associer sa valeur moyenne $\bar{\phi}$ (grandeur macroscopique). Cette correspondance s'exprime sous forme d'une intégrale :

$$\bar{\phi} = \int_{\mathbb{R}^3} f\phi_{dw} \qquad (dw = dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3)$$

Elle est linéaire et continue (pour une classe de fonction ϕ convenablement choisie).

- linéarité : $\phi_1 + \phi_2 \longrightarrow \overline{\phi}_1 + \overline{\phi}_2$

  $\lambda\phi \longrightarrow \lambda\overline{\phi}$

- continuité : si ϕ_n est une suite de fonctions de classe convenable convergeant vers zéro, alors la suite de nombre $\overline{\phi}_n$ converge également vers zéro.

Le point de vue des "distributions" consiste à s'affranchir du concept d'intégrale et de fonction de répartition f, et de garder les propriétés de linéarité et de continuité qu'imposent la physique. C'est ainsi que nous dirons qu'à une grandeur microscopique ϕ est associé une grandeur macroscopique $\overline{\phi}$ au moyen d'une fonctionnelle linéaire, continue T; et nous noterons $\overline{\phi} = \langle T, \phi \rangle$. La description du plasma se ramène à la connaissance de cet opérateur linéaire qui fournit les grandeurs mesurables expérimentalement.

Si dans un problème physique on est parti d'une fonction de répartition f, devenant hautement singulière à la suite d'approximations, T est la forme linéaire approchée, au sens de la topologie faible, de la forme linéaire :

$$\phi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f\phi_{dw}$$

Mais on peut imaginer qu'il existe des problèmes de physique se posant directement en termes de distribution.

Tous les mements devant être définis, l'usage des distributions sera restreint à l'espace des distributions à décroissance rapide, et les fonctions Φ seront de

classe C^∞ à croissance lente. Ainsi le densité n sera donnée par $< T,1>$, les composantes v_i de la vitesse macroscopique par $< T,w_i>$, les composantes du tendeur pression seront déduites de $< T, w_i w_j>$, etc....

Ce formalisme s'impose dans deux cas : d'abord lorsque la répartition des vitesses est singulière (ce qui peut arriver, par exemple, dans un miroir), ensuite lorsqu'on a besoin d'une approximation qui ne peut pas se faire au sens des fonctions. C'est pour cette dernière raison que nous l'utiliserons dans la conduite des calculs. L'illustration la plus connue de ce phénomène est la convergence vers la distribution de Dirac d'une loi de GAUSS dont l'écart-type tend vers zéro : l'approximation plasma froid amène à remplacer la maxwellienne par la distribution de Dirac.

Dans la pratique, il est souvent intéressant d'approcher une intégrale de la forme $\int f\phi \, dx$ par une distribution. Par exemple une loi de GAUSS peut être rapprochée à l'ordre p quelconque par rapport à son écart-type ε par la distribution suivante :

$$g_p = \delta + \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^n a_n \delta^{(n)}$$

où $\delta^{(n)}$ est la dérivée nième de la distribution de Dirac

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \alpha^n e^{\frac{-\alpha^2}{2}} d\alpha$$

C'est à dire que si g est la loi de GAUSS, considérée comme distribution, on a $g = g_p + \varepsilon^p R_p(\varepsilon)$ où $R_p(\varepsilon)$ est une famille de distributions convergeant vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$.

On généralise facilement ce résultat à plusieurs dimensions, on obtient par exemple au second ordre

la distribution approchée T_2 telle que

$$\forall \phi \in D \quad \langle T_2, \phi \rangle = \phi(o) + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta\phi(o)$$

L'intérêt consiste alors à utiliser dès le début du calcul la distribution approchée plutôt que de faire des passeges à la limite en fin de calcul; on allège considérablement les calculs et on obtient avec certitude la solution approchée : c'est le cas des solutions développées par rapport aux rayons de Larmor qui ne sontpas commodes à calculer par les méthodes classiques. Mais l'exemple cité plus haut montre qu'il est nécessaire de considérer une distribution non pas comme une "superfonction" mais comme une fonctionnelle linéaire continue, tel est le changement de concept mathématique indispensable.

Nous utiliserons les trois propriétés suivantes des distributions (2) :

Propriété 1 : Si α est une fonction de classe C^∞, alors $\forall T \in D'$ on définit une distribution $\alpha T \in D'$ telle que $\forall \phi \in D$ $\langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha\phi \rangle$

Propriété 2 : Si D est un opérateur différentiel linéaire, alors $\forall T \in D'$ on définit $DT \in D'$ telle que $\forall \phi \in D$ $\langle DT, \phi \rangle = \langle T, D^* \phi \rangle$.
D^* étant l'opérateur adjoint de D.

On rappelle que, si $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ les p_i étant des entiers positifs ou nuls, on note

$$|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n, \quad D^p = \frac{\delta^{|p|}}{\delta x_1^{p_1} \delta x_2^{p_2} \ldots \delta x_n^{p_n}}$$

Un opérateur différentiel d'ordre m linéaire s'écrit :

$$D = \sum_{|p| \leq m} a_p D^p \quad \text{où les } a_p \text{ sont des fonctions de classe } C^\infty.$$

L'opérateur adjoint D^* est tel que :

$$D^* \phi = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_p \phi)$$

Propriété 3. : Si h est un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire une application bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ indéfiniment différentiable ainsi que son inverse, alors $\forall T \in D'$ on définit une distribution To h $\in D'$ telle que , $\forall \phi \in D$,

$$\langle To\ h, \phi \rangle = \langle T, \phi o\ h^{-1} \rangle$$

Remarque : Lorsque h est un difféomorphisme C^∞ local et non global, on peut encore définir To h, grâce au principe du "recollement des morceaux".

- Résolution de l'équation de VLASOV au sens des distributions.

Soit U le potentiel électrostatique et $A = (A_1, A_2, A_3)$ le potentiel vecteur répartis dans l'espace muni de la métrique définie par le tenseur $g_{ij}\, dq^i \otimes dq^j$, (q^1, q^2, q^3) étant le système de coordonnées locales. L'hamiltonien d'une particule de charge e et de masse m s'écrit :

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij} (p_i - eA_i)(p_j - eA_j) + e\,U$$

On note $w_i = \frac{1}{m}(p_i - eA_i)$, (p_i) étant l'impulsion.

Considérons un plasma soumis à une pertubation de potentiel électrostatique $\tilde{U}_t(q)$; la distribution de chaque espèce de particule se décompose en $f(q,p) + \tilde{f}_t(q,p)$ et satisfait à l'équation de VLASOV :

$$\frac{\delta}{\delta t}(f + \tilde{f}_t) + \frac{\delta}{\delta p_i}(H + e\tilde{U}_t)\frac{\delta}{\delta q^i}(f + \tilde{f}_t) - \frac{\delta}{\delta q^i}(H + e\tilde{U}_t)\frac{\delta}{\delta p_i}(f + \tilde{f}_t) = 0$$

f satisfait à l'équation stationnaire :

$$\frac{\delta H}{\delta p_i}\frac{\delta f}{\delta q^i} - \frac{\delta H}{\delta q^i}\frac{\delta f}{\delta p_i} = 0$$

Nous supposerons que $\tilde{f}_t$ satisfait approximativement l'équation linéarisée suivante :

$$\underline{D\,\tilde{f}_t = F_t} \qquad \text{où } F_t = e\,\frac{\delta \tilde{U}_t}{\delta q^i}\,\frac{\delta f}{\delta p_i}$$

$$\text{et } D = \frac{\delta}{\delta t} + \frac{\delta H}{\delta p_i}\frac{\delta}{\delta q^i} - \frac{\delta H}{\delta q^i}\frac{\delta}{\delta p_i}$$

L'opérateur adjoint de D est tel que =

$$D^*\phi = -\frac{\delta \phi}{\delta t} - \frac{\delta}{\delta q^i}\left(\frac{\delta H}{\delta p_i}\phi\right) + \frac{\delta}{\delta p_i}\left(\frac{\delta H}{\delta q^i}\phi\right)$$

$$= -\left[\frac{\delta}{\delta t}\phi + \frac{\delta H}{\delta p_i}\frac{\delta}{\delta q^i} - \frac{\delta H}{\delta q_i}\frac{\delta}{\delta p_i}\right]\phi + \left(\frac{\delta^2 H}{\delta p_i \delta q^i} - \frac{\delta^2 H}{\delta q^i \delta p_i}\right)\phi$$

$$\text{or } \frac{\delta^2 H}{\delta p_i \delta q^i} - \frac{\delta^2 H}{\delta q^i \delta p_i} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{D^* = -D}$$

Désignons le point courant de l'espace des phases $\mathcal{E}$ par $x = (q^1, q^2, q^3, p^1, p^2, p^3)$, et $X = X^i \frac{\delta}{\delta x^i}$ le champ de vecteur sur l'espace des phases de composantes $\left(\frac{\delta H}{\delta p_1}, \frac{\delta H}{\delta p_2}, \frac{\delta H}{\delta p_3}, -\frac{\delta H}{\delta q^1}, -\frac{\delta H}{\delta q^2}, -\frac{\delta H}{\delta q^3}\right)$.

$D = \frac{\delta}{\delta t} + X$. On suppose H de classe C^∞ sur l'espace des phases, X est alors un champ de classe C^∞. Les trajectoires caractéristiques de ce champ se déduisent de l'intégration du système différentiel : $\frac{dx^i}{dt} = X^i(x)$

Ce sont les équations d'Hamilton de la particule dans le régime non perturbé.

Si la particule se trouve au point x de l'espace des phases à l'instant t, elle est, à l'instant t', au point x' de la caractéristique obtenue par intégration du système d'équations différentielles ci-dessus; et nous écrirons :

$$x' = h_{t'-t}(x)$$

La famille d'applications h_s, où $s \in \mathbb{R}$, possède les propriétés suivantes (3) :

- les h_s sont des difféomorphismes C^∞ locaux de l'espace des phases. (Nous supposerons dans la suite, pour simplifier l'exposé, que ces difféomorphismes sont globaux; ce qui sera le cas dans les applications. Dans le cas contraire, il faudrait reprendre les calculs qui vont suivre en appliquant le principe du "recollement des morceaux").

- h_o est l'application identique, i . e., $\forall\, x, h_o(x) = x$

- $h_{s_1+s_2} = h_{s1} \circ h_{s_2}$ ($\Rightarrow h_s^{-1} = h_{-s}$)

- $\frac{\delta}{\delta s} h_s^i = X^i \circ h_s$ ($\Rightarrow \forall x$, $s \to h_s(x)$ est une application de classe C^∞)

La famille d'applications h_s forme donc un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$, appelé groupe à un paramètre.

On peut signaler une propriété utile, mais

que nous n'utiliserons pas : si ϕ est une fonction analytique

$$\phi \circ h_t = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^n \chi(n)\phi \qquad \text{où} \quad \chi = \chi^i \frac{\delta}{\delta x^i}$$

La famille h_s a des propriétés analogues à celles des exponentiels, comme on peut le remarquer; c'est pour cette raison que certains auteurs notent symboliquement

$$h_t = \exp(-t\chi)$$

Soit ϕ une fonction différentiable

$$\frac{\delta}{\delta t}(\phi \circ h_t) = \frac{\delta \phi}{\delta t} \circ h_t + \frac{\delta h_t^i}{\delta t}\left(\frac{\delta \phi}{\delta x^i} \circ h_t\right)$$

$$\text{or} \quad \frac{\delta h_t^i}{\delta t} = \chi^i \circ h_t \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{\delta t}(\phi \circ h_t) = \left(\frac{\delta \phi}{\delta t} + \chi^i \frac{\delta}{\delta x^i}\phi\right) \circ h_t = (D\phi) \circ h_t$$

$$\text{or} \quad h_t^{-1} = h_{-t} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{D\phi = \frac{\delta}{\delta t}(\phi \circ h_t) \circ h_{-t}}$$

+ Nous allons étendre ce résultat aux distributions.

Soit donc $T \in D'(\mathcal{E} \times \mathbb{R})$ espace des distributions (portant sur l'espace des phases et le temps)

et $\phi \in D(\mathcal{E} \times \mathbb{R})$ espace des fonctions C^∞ a support compact

$$\langle DT, \phi \rangle = \langle T, D^* \phi \rangle = - \langle T, D\phi \rangle \qquad \text{car } D^* = -D$$

$$\text{or } D\phi = \frac{\delta}{\delta t}(\phi \circ h_t) \circ h_{-t} \qquad \Rightarrow$$

$$\langle DT, \phi \rangle = - \left\langle T, \frac{\delta}{\delta t}(\phi \circ h_t) \circ h_{-t} \right\rangle$$

$$= - \langle T \circ h_t , \frac{\delta}{\delta t}(\phi \circ h_t) \rangle = \langle \frac{\delta}{\delta t}(T \circ h_t) , \phi \circ h_t \rangle$$

$$= \langle \frac{\delta}{\delta t}(T \circ h_t) \circ h_{-t} , \phi \rangle \qquad \forall \phi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{DT = \frac{\delta}{\delta t}(T \circ h_t) \circ h_{-t}}$$

+ Reprenons l'équation de VLASOV linéarisée :

$$D \tilde{f}_t = F_t$$

Si à l'état stationnaire on suppose que f est une distribution, alors F_t est une distribution sur $\mathcal{E}$ dépendant du temps considéré comme paramètre. $\tilde{f}_t$ est donc aussi une distribution dépendant du paramètre temps.

On a alors $\frac{\delta}{\delta t}(\tilde{f}_t \circ h_t) \circ h_{-t} = F_t$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta t}(\tilde{f}_t \circ h_t) = F_t \circ h_t \Rightarrow \tilde{f}_t \circ h_t = \int^t ds \; F_s \circ h_s$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_t = (\int^t ds \; F_s \circ h_s) \circ h_{-t} \qquad \text{or } h_s \circ h_{-t} = h_{s-t}$$

d'où $\boxed{\tilde{f}_t = \tilde{f}_o + \int_o^t ds \; F_s \circ h_{s-t}}$

$\forall t \quad \tilde{f}_t \in D'(\mathcal{E})$ et $\forall \phi \in D(\mathcal{E})$ on a

$$\langle \tilde{f}_t , \phi \rangle = \langle \tilde{f}_o , \phi \rangle + \int_o^t ds \; \langle F_s \circ h_{s-t} , \phi \rangle$$

ou encore $\langle f_t , \phi \rangle = \langle f_o , \phi \rangle + \int_o^t ds \langle F_s , \phi \circ h_{t-s} \rangle$

Remarque : ce résultat est indépendant du choix des conditions initiales sur les caractéristiques.

÷÷÷÷÷÷÷

Etablissement de l'équation des ondes électrostatiques (ou quasi électrostatiques) stationnaires.

Les fluctuations de potentiel électrostatique et de densité sont reliées par l'équation de POISSON, qui donc régit les modes propres électrostatiques du plasma. Nous cherchrons les solutions de la forme

$\tilde{U}_t(q) = \tilde{\Phi}_t \Phi(q)$, sachant que toute combinaison de solutions de ce type sera solution du problème, bien qu'à priori on ne soit pas sûr d'obtenir ainsi toutes les solutions possibles. (Cette incertitude sera levée pour les ondes de dérives).

Nous allons établir une équation d'ondes dans les conditions suivantes :

- au système de coordonnées locales $q = (q^1, q^2, q^3)$ est associé un repère naturel au point q, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, définissant le tenseur métrique de composants $g_{ij} = \vec{e}_i . \vec{e}_j$ que nous restreignons à la forme suivante :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

On désigne par g^{ij} les composantes du tenseur inverse :

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

Le carré de la vitesse s'écrit alors $g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = g^{ij} w_i w_j$

- on suppose que le champ magnétique statique est appliqué suivant $\vec{e}_3$.

- on suppose en outre que le rayon de Larmor moyen des particules est très petit devant le rayon de courbure des trajectoires des centres guides, et que les forces statiques appliquées perpendiculairement au champ magnétique ne varient que de façon adiabatique.

Les vitesses se décomposent alors approximativement en une vitesse de dérive de composantes contravariantes $(\bar{\dot{q}}^i)$ et une vitesse dûe au mouvement cyclotronique de composantes covariantes (w_i).

En première approximation, nous pouvons écrire les transformations h_t de la façon suivante :

$$\begin{cases} q'^i = q^i - \bar{\dot{q}}^i t - G^{ij}(q,t)\, w_j \\ w'_i = R_i^{\ j}(q,t)\, w_j \end{cases}$$

Les tenseurs (G^{ij}) et (R_i^j) dépendent de q uniquement à cause de la géométrie.

En exprimant les fonctions à l'aide des variables (q,w) au lieu de (q,p) on définit alors :

$$f^*(q, w) = f(q', w')$$

$$\Phi^*(q, w) = \bar{\Phi}(q')$$

Et on obtient le système de relations suivantes :

$$\frac{\delta \Phi^*}{\delta q^i} = \left(\frac{\delta \Phi}{\delta q^j}\right)^* \left(\delta_i^j - \frac{\delta \bar{\dot{q}}^j}{\delta q^i} t - \frac{\delta G^{jk}}{\delta q^i} w_k\right)$$

$$\frac{\delta \Phi^*}{\delta w^i} = -\left(\frac{\delta \Phi}{\delta q^j}\right)^* G^{ji}$$

$$\frac{\delta f^*}{\delta q^i} = \left(\frac{\delta f}{\delta q^j}\right)^* \left(\delta_i^j - \frac{\delta \bar{\dot{q}}^j}{\delta q^i} t - \frac{\delta G^{jk}}{\delta q^i} w_k\right) + \left(\frac{\delta f}{\delta w_j}\right)^* \frac{\delta R_j^k}{\delta q^i} w_k$$

$$\frac{\delta f^*}{\delta w_i} = -\left(\frac{\delta f}{\delta q^j}\right)^* G^{ij} + \left(\frac{\delta f}{\delta w_j}\right)^* R^i_j$$

On établit alors l'expression suivante, compte-tenu du fait que la distribution permanente f est invariante dans les transformations du groupe à un paramètre :

$$\left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta w_i}\frac{\delta \Phi}{\delta q^i}\right)^*, 1 \right\rangle =$$

$$\left\langle f, \frac{\nabla}{\delta q^i} G^{ij} \bar{R}^{-1k}_j \frac{\delta}{\delta q^k} \Phi^* \right\rangle + \left\langle \frac{\delta f}{\delta q^i}, G^{ij} \bar{R}^{-1k}_j \frac{\delta}{\delta q^k} \Phi^* \right\rangle$$

(où le signe distribution $\langle\ \rangle$ ne porte désormais que sur l'ensemble des vitesses w).

Nous allons calculer le tenseur de composantes $G^{ij}\bar{R}^{-1k}_j$ d'abord en géométrie cartésienne, puis passer aux systèmes de coordonnées (q^i).

Ω étant la pulsation cyclotronique,

$$(R^j_k(s)) = \begin{pmatrix} \cos \Omega s & \sin \Omega s & 0 \\ -\sin \Omega s & \cos \Omega s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(G^{ij}(t)) = \delta^{ij} \int_0^t R^j_k(s)\, ds$$

$$\left(G^{ij}\bar{R}^{-1k}_j(t)\right) = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix} \sin \Omega t & \cos \Omega t - 1 & 0 \\ 1 - \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & \Omega t \end{pmatrix}$$

Ce résultat peut être décomposé de la façon suivante :

$$\left(G^{ij}\bar{R}^{1k}_{j}\right) = \frac{\sin\Omega t}{\Omega}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{1-\cos\Omega t}{\Omega}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Revenons à la métrique (g_{ij})

dét $(g_{ij}) = g > 0$.

Le jacobien J du système de coordonnées est égal à $\sqrt{g}$
soit (A^j_i) la matrice de changement de base.

$$\text{dét}\,(A^j_i) = J = \sqrt{g} \qquad A^i_k\, g^{kl} A^j_l = \delta^{ij}$$

$$\text{dét}\,(\bar{A}^{1j}_{i}) = \frac{1}{J} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

D'où le résultat :

$$\left(G^{ij}\bar{R}^{1k}_{j}\right) = \frac{\sin\Omega t}{\Omega}\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}&0\\g^{21}&g^{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&g^{33}\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1-\cos t}{\Omega}\sqrt{\frac{g^{33}}{g}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ceci donne en définitive :

$$\left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta w_i}\frac{\delta \Phi}{\delta q^i}\right)^{*}, 1\right\rangle = \frac{\sin\Omega t}{\Omega}\left(\langle f, \nabla_i\, g^{ij}\,\delta_j\,\Phi^{*}\rangle + \langle \delta_i f, g^{ij}\delta_j \Phi^{*}\rangle\right)_{i,j\leq 2}$$

$$+ t\left(\langle f, \nabla_3 g^{33}\delta_3\,\Phi^{*}\rangle + \langle \delta_3 f,\, g^{33}\delta_3\,\Phi^{*}\rangle\right)$$

$$+ \frac{1-\cos\Omega t}{\Omega}\sqrt{\frac{g^{33}}{g}}\left(\left\langle\frac{\delta f}{\delta q^2}, \frac{\delta\Phi^{*}}{\delta q^1}\right\rangle - \left\langle\frac{\delta f}{\delta q^1}, \frac{\delta\Phi^{*}}{\delta q^2}\right\rangle\right)$$

Sous forme condensée, nous écrirons :

$$\left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta w_i} \frac{\delta \Phi}{\delta q^i} \right)^*, 1 \right\rangle = \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \left(\langle f, \Delta_\perp \Phi^* \rangle + \langle \nabla_\perp f ; \nabla_\perp \Phi^* \rangle \right)$$

$$+ t \left(\langle f, \Delta_{/\!/} \Phi^* \rangle + \langle \nabla_{/\!/} f ; \nabla_{/\!/} \Phi^* \rangle \right)$$

$$+ \frac{1-\cos \Omega t}{\Omega} \quad \langle \{ \nabla f ; \nabla \Phi^* \}_{/\!/} \rangle$$

Les perturbations de densité dépendent linéairement de la perturbation de potentiel par la relation suivante :

$$\tilde{n} = \frac{nq}{m} \int_0^t ds \, \tilde{\Phi}_{t-s} \left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta w_i} \frac{\delta \Phi}{\delta q_i} \right)^*, 1 \right\rangle$$

$$\tilde{\Phi}_t = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ - soit } Y_t = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

L'équation de POISSON donne:

$$\tilde{\Phi}_t \Delta \phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \int_{\mathbb{R}} ds \, \tilde{\Phi}_{t-s} \, Y_s \left\langle \left(\frac{\delta f_a}{w_i} \frac{\delta \phi}{\delta q_i} \right)_s, 1 \right\rangle = 0$$

L'intégrale n'est pas autre chose qu'un produit de convolution de fonctions à support dans $\mathbb{R}^+$; la transformation de LAPLACE transforme le produit de convolution en produit simple.

La sommation d'indice "a" porte sur les diverses espèces de particules.

$\mathcal{L}$ désignant la transformation de LAPLACE, l'équation précédente devient :

$$\Delta \tilde{\Phi} + \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}_y \left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta w_i} \frac{\delta \Phi}{\delta q_i} \right)^*, 1 \right\rangle = 0$$

Nous aboutissons enfin à l'équation des ondes électrostatiques stationnaires :

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}.y_t \left[\frac{\sin\Omega at}{\Omega_a} \left(< f_a, \Delta\, \Phi^* > + < \nabla_\perp f_a ; \nabla_\perp\, \Phi^* > \right) \right.$$

$$+ t \left(< f_a, \Delta_{//}\, \Phi^* > + < \nabla_{//}\, f_a ; \nabla_{//}\, \Phi^* > \right)$$

$$\left. + \frac{1-\cos\Omega at}{\Omega_a} < \{ \nabla f_a \hat{,} \nabla\Phi^* \}_{//} > \right] = 0$$

S'il n'y a pas de champ magnétique, $\Omega \to o$ =>

$$\frac{\sin\,\Omega t}{\Omega} \to t \ , \ \frac{1 - \cos\,\Omega t}{\Omega} \to o$$

L'équation se réduit alors à :

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}.y_t\, t \left[< f, \Delta\Phi^* > + < \nabla f ; \nabla\Phi^* > \right] = 0$$

Cas d'un plasma collisionnel.

Les collisions seront décrites par l'introduction dans le second membre de l'équation de VLASOV linéarisée du terme de KROOK : $- \upsilon(\tilde{f} - \frac{\tilde{n}}{n} g)$

$\tilde{f}$ se relaxe vers la distribution $\frac{\tilde{n}}{n} g$ où g est une maxwellienne

Notons

$$U(t) = \frac{\sin\Omega t}{\Omega} \left(< f, \Delta_\perp \Phi^* > + < \nabla_\perp f ; \nabla_\perp\, \Phi^* > \right) + t \left(< f, \Delta_{//} \Phi^* > + < \nabla_{//}\, f ; \nabla_{//}\, \Phi^* > \right)$$

$$+ \frac{1-\cos\Omega t}{\Omega} < \{ \nabla f \hat{,} \nabla\Phi^* \}_{//} >$$

Dans l'hypothèse où $\upsilon << \Omega$ et que le plasma est homogène dans la direction du champ magnétique, on établit :

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \frac{\mathcal{L}.y_t e^{-\upsilon_a t} U_a(t)}{1 - \upsilon_a \mathcal{L}.y_t\, e^{-\upsilon_a t} \left\langle g_{a_{//}}, e^{-ik_{//} w_{//} t} \right\rangle} = 0$$

Remarque : Cette procédure de calcul, qui consiste à intégrer d'abord sur les vitesses et ensuite sur le temps en faisant une transformation de LAPLACE, présente de nombreux avantages : rigueur et simplicité dans le calcul, obtention directe de fonctions holomorphes de ω complexe.

Avant de passer à l'étude de la stabilité des ondes dans magnétoplasma inhomogène, nous allons illustrer ces résultats sur des exemples simples et montrer ainsi de quelle façon on retrouve des équations de dispersion bien connues.

****

1.2. Illustration de la méthode sur des exemples simples.

Dans un plasma homogène sans collision l'équation des ondes se réduit à :

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}_{y_t}\left(\frac{\sin\Omega at}{\Omega_a} \langle f_a, \Delta_\perp \Phi^* \rangle + t \langle f_a, \Delta_{//} \Phi^* \rangle\right) = 0$$

A/ Plasma sans champ magnétique appliqué.

L'équation devient :

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}_{y_t} t \langle f_a, \Delta\Phi^* \rangle = 0$$

soit encore

$$\Delta\Phi - i\frac{\delta}{\delta\omega} \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}_{y_t} \langle f_a, \Delta\Phi^* \rangle = 0$$

Faisons une transformation de FOURIER dans l'espace :

$$\mathcal{F}.\Phi = e^{-i\vec{k}.\vec{w}t}\, \mathcal{F}.\Phi \quad \Longrightarrow$$

$$1 - i\frac{\delta}{\delta\omega} \sum_\alpha \omega_{pa}^2 \mathcal{L}_{y_t} \langle f_a, e^{-i\vec{k}.\vec{w}t} \rangle = 0$$

1) Plasma froid : $f_a = \delta$

$$\Longrightarrow \langle f_a, e^{-i\vec{k}.\vec{w}t} \rangle = 1 \qquad \mathcal{L}_{y_t} = -\frac{1}{i\omega}$$

D'où l'équation de dispersion : $1 + \frac{\delta}{\delta\omega} \sum_a \frac{\omega p^2 a}{\omega} = 0$

soit $\underline{1 - \sum_a \frac{\omega p^2 a}{\omega^2} = 0}$

2) Plasma constitué de plusieurs faisceaux de vitesse $\vec{v}_a$

$f_a = \delta_{\vec{v}_a}$ c'est à dire que $\langle f_a, \phi \rangle = \phi(\vec{v}_a)$

$\langle f_a, e^{-i\vec{k}.\vec{w}\,t} \rangle = e^{-i\vec{k}.\vec{v}_a t}$

$\mathcal{L}_t\, e^{-i\vec{k}.\vec{v}_a t} = \frac{1}{i(\omega - \vec{k}.\vec{v}_a)}$

D'où l'équation de dispersion : $1 + \frac{\delta}{\delta\omega} \sum_a \frac{\omega p^2 a}{(\omega - \vec{k}.\vec{v}_a)} = 0$

soit donc $\underline{1 - \sum_a \frac{\omega p^2 a}{(\omega - \vec{k}.\vec{v}_a)^2} = 0}$

3) Plasma tiède : $\langle f_a, \phi \rangle = \phi(o) + \frac{C_a^2}{2} \Delta_w \phi(o)$

$\langle f_a, e^{-i\vec{k}.\vec{w}t} \rangle = 1 - \frac{t^2 C_a^2}{2} k^2$

$\mathcal{L}_t\, (1 - k^2 C_a^2 \frac{t^2}{2}) = -\left(\frac{1}{i\omega} + \frac{k^2 C_a^2}{i\omega^3}\right)$

Equation de dispersion : $1 + \frac{\delta}{\delta\omega} \Sigma \omega_{pa}^2 \left(\frac{1}{\omega} + \frac{k^2 Ca^2}{\omega^3}\right) = o$

soit donc $\underline{1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3\, k^2 Ca^2}{\omega^2}\right) = o}$

4) Plasma chaud maxwellien.

$$\langle f_a, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} C_a^3} e^{-\frac{w^2}{2C_a^2}} \phi(\vec{w})\, d\vec{w}$$

$$\langle f_a, e^{-i\vec{k}.\vec{w}t} \rangle = e^{-k^2 C_a^2 \frac{t^2}{2}}$$

$$i\mathcal{L}.(y_t\, e^{-k^2 C_a^2 \frac{t^2}{2}}) = i \int_{\mathbb{R}^+} e^{k^2 C_a^2 \frac{t^2}{2} + i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}kC_a} \mathcal{Z}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kC_a}\right) \text{ où } \mathcal{Z} \text{ est la fonction de Fried et Conte}$$

En effet on peut établir facilement que la fonction de FRIED et CONTE est la transformée de LAPLACE de la fonction

$$t \to i\, y_t\, e^{-\frac{t^2}{4}}$$

D'où l'équation de dispersion :

$$1 - \sum_a \omega_{pa}^2 \frac{1}{\sqrt{2}kC_a} \frac{\delta}{\delta\omega} \mathcal{Z}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kC_a}\right) = 0$$

Soit donc :

$$1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{2k^2 Ca^2} \mathcal{Z}'\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kC_a}\right) = 0$$

B/ <u>Plasma avec champ magnétique appliqué</u>.

1) Plasma froid : $f_a = \delta \Rightarrow \langle f_a, \Phi \rangle = \Phi$

L'équation devient alors : $\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \left[\Delta_{/\!/}\Phi\, \mathcal{L}.(y_t t) + \Delta_\perp \Phi\, \mathcal{L}.\left(y_t \frac{\sin\Omega a t}{\Omega_a}\right)\right]$

$$\mathcal{L}.y_t t = -\frac{1}{\omega^2} \qquad \mathcal{L}.y_t \frac{\sin\Omega a t}{\Omega_a} = -\frac{1}{\omega^2 - \Omega_a^2}$$

D'où $$\Delta\Phi - \sum_a \left(\frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}\Delta_{/\!/}\Phi + \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \Omega_a^2}\Delta_\perp\Phi\right) = 0$$

Si la géométrie est cartésienne, la transformation de FOURIER dans l'espace conduit à :

$$1 - \sum_a \left(\frac{k_{//}^2}{k^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \Omega_a^2} \right) = 0$$

On retrouve bien les résonances hybrides en faisant $k_{//} = 0$ et les résonances plasmas en faisant $k_\perp = 0$

2) Plasma tiède : $\langle f_a, \phi \rangle = \phi(o) + \frac{c_a^2}{2} g_{ij} \frac{\delta^2 \phi(o)}{\delta w_i \, \delta w_j}$

$$g_{ij} \frac{\delta \Phi^*}{\delta w_i \delta w_j} = 2 \frac{1-\cos\Omega t}{\Omega} \Delta_\perp \Phi^* + t^2 \Delta_{//} \Phi^*$$

(remarque : lorsque $\Omega \to o, 2 \frac{1-\cos \Omega t}{\Omega} \to t^2$)

$$\Phi^*_{w=o} = \Phi \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \mathcal{L}.y_t \left[\left(\frac{\sin\Omega at}{\Omega_a} \Delta_\perp \Phi + t \, \Delta_{//} \Phi \right) + \right.$$

$$c_a^2 \left(\frac{1-\cos \Omega at}{\Omega_a^2} \frac{\sin \Omega at}{\Omega_a} \Delta_\perp \Delta_\perp \Phi + \frac{1-\cos\Omega at}{\Omega_a^2} t \, \Delta_\perp \Delta_{//} \Phi + \right.$$

$$\left. \left. \frac{t^2}{2} \frac{\sin\Omega at}{\Omega a} \Delta_{//} \Delta_\perp \Phi + \frac{t^3}{2} \Delta_{//} \Delta_{//} \Phi \right) \right] = 0$$

$$\mathcal{L}.y_t \frac{(1-\cos\Omega at)\sin\Omega at}{\Omega_a^3} = \frac{3}{(\omega^2 - \Omega a^2)(\omega^2 - 4\Omega a^2)}$$

$$\mathcal{L}.y_t \, t \frac{1-\cos\Omega at}{\Omega_a^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{3\omega^2 - \Omega a^2}{(\omega^2 - \Omega_a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}.y_t \frac{t^2}{2} \frac{\sin\Omega at}{\Omega a} = \frac{3\omega^2 + \Omega a^2}{(\omega^2 - \Omega a^2)^3} \qquad \mathcal{L}.y_t \frac{t^3}{2} = \frac{3}{\omega^4}$$

D'où l'équation des ondes :

$$\Delta\Phi - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \Omega_a^2} \Delta_\perp \left(1 - \frac{3 c_a^2}{\omega^2 - 4\Omega_a^2} \Delta_\perp - \frac{5\omega^2 - \Omega a^2}{(\omega^2 - \Omega_a^2)^2} c_a^2 \Delta_{//} \right) \Phi$$

$$-\sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \quad \Delta_{//}\left(1 - \frac{3\,C_a^2}{\omega^2}\,\Delta_{//} - \frac{C_a^2}{(\omega^2-\Omega_a^2)}\,\Delta_{\perp}\right)\Phi = 0$$

En géométrie cartésienne on obtient, en accord avec D. QUEMADA (4) :

$$1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2-\Omega_a^2}\,\frac{k_\perp^2}{k^2}\left(1 + \frac{3\,k_\perp^2 C_a^2}{\omega^2\,\Omega_a^2} + \frac{5\omega^2-\Omega_a^2}{(\omega^2-\Omega_a^2)^2}\,k_{//}^2\,C_a^2\right.$$

$$\left. \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}\,\frac{k_{//}^2}{k^2}\left(1 + \frac{3k_{//}^2C^2}{\omega^2} + \frac{k_\perp^2\,C_a^2}{\omega^2-\Omega_a^2}\right) = 0\right.$$

Remarque : si on fait $\Omega_a = o$, on obtient :

$$1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}\,\frac{k_\perp^2}{k^2}\left(1 + \frac{3k_\perp^2C^2}{\omega^2}a - + 5\,\frac{k_{//}^2C^2}{\omega^2}a-\right) - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}\,\frac{k_{//}^2}{k^2}\left(1 + 3\frac{k_{//}^2C^2}{\omega^2}a - + \frac{k_\perp^2C^2}{\omega^2-\Omega_a}a\right) = 0$$

ce qui redonne à nouveau : $1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2C_a^2}{\omega^2}a-\right) = 0$

3) Plasma chaud maxwellien :

$$f_a(\vec{w}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}C_a^3}\,e^{-\frac{w^2}{2C_a^2}} \qquad \vec{w}' = \mathcal{R}(t).\vec{w} \text{ où } \mathcal{R}(t) = e^{-t\vec{\Omega}}$$

$$x' = x - G(t).\vec{w} \text{ où } G(t) = \int_o^t d\alpha\,\mathcal{R}(\alpha)$$

L'équation de dispersion s'écrit :

$$1 + \sum_a \omega_{pa}^2 \wp.y_t \left\langle f_a, \left(\frac{k_{//}^2}{k^2}\,t + \frac{k_\perp^2}{k^2}\,\frac{\sin\Omega at}{\Omega_a}\right) e^{-i\vec{k}.G(t).\vec{w}}\right\rangle$$

$$\left\langle f_a,\ e^{i\vec{k}.G(t).\vec{w}}\right\rangle = e^{-\frac{C_a^2}{2}\left[\vec{k}.G(t)\right]^2}$$

$$\left[\vec{k}.G(t)\right]^2 = \vec{k}.Go^tG.\vec{k} = \frac{2k_\perp^2}{\Omega_a^2}\,(1-\cos\Omega at) + k_{//}^2t^2$$

$$\Rightarrow \left\langle f_a,\ e^{-i\vec{k}.G(t).\vec{w}}\right\rangle = \exp\left[-\frac{k_\perp^2C_a^2}{\Omega^2}\,(1-\cos\Omega at) - k_{//}^2C_a^2\,\frac{t^2}{2}\right] = \Phi_a\ (t)$$

$$\frac{k_{/\!/}^2 t}{k^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \frac{\sin \Omega a t}{\Omega_a} = - \frac{1}{k^2 C_a^2} \frac{d}{dt} \phi_a(t)$$

Equation de dispersion :

$$1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2 C_a^2} \left[1 + i\omega \int_{\mathbb{R}^+} e^{i\omega t} \phi_a(t)\, dt \right] = 0$$

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \qquad e^{x \cos t} = \sum_n I_n(x)\, e^{-int}$$

$$\rho_a^2 = \frac{C_a^2}{\Omega_a} \quad , \int_{\mathbb{R}^+} e^{i\omega t} \phi(t) dt = - \frac{i}{\sqrt{2} k_{/\!/} C_a} \sum_n I_n(k_\perp^2 \rho_a^2)\, e^{-k_\perp^2 \rho_a^2} Z\left(\frac{\omega + n\Omega a}{\sqrt{2} k_{/\!/} C_a} \right)$$

D'où en définitive =

$$1 + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{k^2 C_a^2} \left[1 + \frac{\omega}{\sqrt{2} k_{/\!/} C_a} \sum_n I_n(k_\perp^2 \rho_a^2)\, e^{-k_\perp^2 \rho_a^2} Z \left(\frac{\omega + n\Omega a}{\sqrt{2} k_{/\!/} C_a} \right) \right] = 0$$

÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷÷

I.2. Ondes quasi-électrostatiques dans un magnétoplasma chaud inhomogène ($\beta \simeq 0$).

L'équation relativement générale, qui a été établie pour l'étude des ondes électrostatiques, et la méthode de calcul qu'elle implique revêtent un intérêt particulier lorsque le plasma est inhomogène et dans une géométrie non cartésienne.

Nous allons l'appliquer à l'étude des instabilités basse fréquence d'une colonne de plasma inhomogène radialement. Nous étudierons d'abord un plasma sans collision et ensuite un plasma fortement collisionnel.

Avant de commencer l'étude des ondes, nous allons d'abord nous intéresser à l'étude statique qui est commune au régime non collisionnel et au régime collisionnel, dans la mesure où les fréquences de collisions sont très petites devant les fréquences cyclotroniques.

Les solutions stationnaires de l'équation de VLASOV ne dépendent que des invariants du mouvement non pertubé. L'Hamiltonien est invariant, ainsi que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{//}$ parallèle au champ magnétique, donc aussi $\mathcal{E}_{\perp} = H - \mathcal{E}_{//}$. L'hamiltonien ne dépendant pas de la coordonnée q^2 (x^2 en cartésienne, θ en cylindrique), nous avons $\dot{p}_2 = \frac{\delta H}{\delta q^2} = 0$

donc un autre invariant = p_2 = Cte

$$p_2 = m w_2 + q A_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{cartésienne} : \quad x_1 - \frac{w_2}{\Omega} = \text{Cte}$$

$$\text{en cylindrique} : \quad r^2 \left(1 - 2 \frac{\dot{\theta}}{\Omega}\right) = \text{Cte}$$

$g_{\theta\theta} = r^2 \qquad w_\theta = g_{\theta\theta}\dot{\theta} \qquad w\dot{\theta} = r^2\,\dot{\theta}$

soit r_o une distance caractérisant le profil de densité

$$\alpha = \frac{r^2}{2r_o^2} - \frac{w\theta}{r_o^2\Omega}$$

est un invariant important dans la description d'un plasma inhomogène.

Nous utiliserons donc des distributions de la forme :

$$f = h(\alpha)\, g_{//}(\mathcal{E}_{//})\, g_{\perp}(\mathcal{E}_{\perp})$$

$g_{//}$ et $g_{\perp}$ étant des maxwelliens, les vitesses thermiques étant respectivement $C_{//}$ et $C_{\perp}$.

Le rayon de Larmor moyen $\rho = \frac{C_\perp}{\Omega}$ est supposé petit devant r_o, ainsi il nous suffira d'approcher f par la distribution suivante :

$$\langle f, \phi\rangle = \left[h\left(\frac{r^2}{2r_o^2}\right) + \frac{r^2}{2r_o^2}\frac{\rho^2}{r_o^2}\, h''\left(\frac{r^2}{2r_o^2}\right)\right]\phi_\perp(v_d) +$$

$$\frac{C_\perp^2}{2}\left[h\left(\frac{r^2}{2r_o^2}\right) \sum_{i,j\leq 2} g_{ij}\frac{\delta^2}{\delta w_i \delta w_j}\,\phi_\perp(v_d) - 2\frac{r^2}{r_o^2\Omega}\, h'\left(\frac{r^2}{2r_o^2}\right)\frac{\delta\phi_\perp}{\delta w_\theta}(v_d)\right]$$

où $\phi_\perp = \int_{\mathbb{R}} g_{//}\,\phi\, dw_{//}$

v_d est la vitesse de dérive azimuthale dûe à l'accélération radiale Γ_r .

$v_d = \frac{r\,\Gamma r}{\Omega}$ Γr a pour origine le champ électrique radiale, la force centrifuge et éventuellement un gradient de pression électromagnetique.

Notons que chaque espèce de particules peut éventuellement

s'écouler parallèlement au champ magnétique avec une vitesse uniforme u_o. Dans ce cas nous centrerons $g_{//}$ sur cette vitesse u_o.

Le calcul des trois premiers moments donnent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{n(r)}{n_o} = h\left(\dfrac{r^2}{2r_o^2}\right) + \dfrac{r^2}{2r_o^2}\dfrac{\rho^2}{r_o^2}h''\left(\dfrac{r^2}{2r_o^2}\right) \\ \dfrac{n(r)}{n_o} v_\theta = \dfrac{n(r)}{n_o} v_d - \dfrac{C_\perp^2}{\Omega}\dfrac{r^2}{r_o^2} h'\left(\dfrac{r^2}{2r_o^2}\right) \\ \dfrac{\vec{\vec{KT}}}{m} \simeq C_{//}^2 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 + C_\perp^2 \left(\vec{\vec{I}} - \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right) \end{cases}$$

Chaque espèce de particules se trouve soumise à une rotation d'ensemble : $\bar{\omega} = \bar{\omega}_d + \bar{\omega}_*$

où $\bar{\omega}_* = -\dfrac{C_\perp^2}{r_o^2\Omega}\dfrac{\dfrac{r_o^2}{r}\dfrac{\delta n}{\delta r}}{n} \simeq -\dfrac{C_\perp^2}{r_o^2\Omega}\dfrac{h'}{h}\left(\dfrac{r^2}{2r_o^2}\right)$

$$\bar{\omega}_* = + \frac{kT_\perp}{qB}\frac{1}{r}\frac{1}{n}\frac{\delta n}{\delta r}$$

Si $q_i = -q_e = e$ on obtient un courant azimuthal

$J_\theta = \dfrac{k(Te_\perp + Ti_\perp)}{B}\dfrac{\delta n}{\delta r}$ qui n'est autre que le rotationnel du vecteur aimantation $\vec{M}$

$$\vec{M} = -\frac{K(Te_\perp + Ti_\perp)}{B^2} n \vec{B}$$

$\bar{\omega}_*$ est donc une rotation dûe au diamagnétisme du plasma.

Si $h = e^{-\frac{r^2}{2r_o^2}}$, cette rotation est uniforme et égale à

$$\bar{\omega}_* = \frac{C_\perp^2}{r_o^2\Omega}$$

ou encore

$$\bar{\omega}_* = \frac{\rho^2}{r_o^2}\Omega$$

2.1. Equation des ondes basse fréquence - Modes propres.

Soit ψ une fonction des coordonnées :

$$\langle f,\psi^* \rangle = \frac{n}{n_o}\left[\psi_\perp + \frac{n'}{n}\frac{C_\perp^2}{\Omega}\frac{1}{r}\frac{\delta\psi_\perp}{\delta\theta}\frac{\sin\Omega t}{\Omega} + \frac{C_\perp^2}{\Omega}(1-\cos\Omega t)H\psi_\perp\right](r,\theta-\omega_d t,Z$$

où $\psi_\perp = \int_{\mathbb{R}} g_{//}\,\psi(x-(\vec{w}_{//}+\vec{u}_{//})t)\,dw_{//}$ et $H_\perp = \Delta_\perp + \frac{n'}{n}\frac{\delta}{\delta r}$

n est fonction de r et $n' = \frac{\delta n}{\delta r}$

La transformation de FOURIER sur les coordonnées Z et Θ revient à remplacer $\Delta_{//}$ par $-k_{//}^2$ et $\frac{\delta}{\delta\theta}$ par im où m est le nombre azimuthal.

On note $\omega_{*a} = -\frac{m}{r}\frac{n'}{n}\frac{C_{//a}^2}{\Omega_a} = m\frac{T_{a//}}{T_{a\perp}}\bar{\omega}_{*a}$

$$\omega_{da} = m\,\bar{\omega}_{da} \qquad \omega_a = \omega - \omega_{da} - k_{//}u_{//a} \qquad \tau_a = \frac{T_{a//}}{T_{a\perp}}$$

L'équation d'onde s'écrit :

$$0 = \Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \int_{\mathbb{R}^+} dt\, e^{i\omega_a t - k_{//}^2 C_{a//}^2 \frac{t^2}{2}}\left[\psi_a - i\frac{\omega_{*a}}{\tau_a}\frac{\sin\Omega_a t}{\Omega_a}\psi_a + \frac{C_{a\perp}^2}{\Omega_a}(1-\cos\Omega_a t)H_\perp\psi_a\right]$$

où

$$\phi_a = -k_{//}^2 t\Phi + \frac{\sin\Omega_a t}{\Omega_a}H_\perp\Phi + i\frac{\omega_{*a}}{C_{a//}^2}(1-\cos\Omega_a t)\Phi$$

On suppose $\Omega_a^2|\Phi| >> k_{//}^2 C_{a//}^2|\Phi|$ et $C_{a\perp}^2|H_\perp\Phi|$

Après transformation de LAPLACE on obtient :

$$\Delta\Phi - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega_a^2-\Omega_a^2} H_\perp \left[1 - \frac{3\, C\bar{a}_\perp^2}{\omega^2-4\Omega_a^2} H_\perp + \frac{\omega_a(3+2\tau_a)+\Omega_a^2(1-2\tau_a)}{(\omega_a^2-\Omega_a^2)2} k_{//}^2 C\bar{a}_{//}^2 \right] \Phi$$

$$- \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{C\bar{a}} \left[1 + \frac{\omega_a-\omega_{*a}}{\sqrt{2}k_{//}C\bar{a}_{//}} Z\left(\frac{\omega_a}{\sqrt{2}k_{//}C\bar{a}_{//}}\right) - \frac{\omega_{*a}}{\sqrt{2}kC\bar{a}_{//}} Z\left(\frac{\omega_a}{\sqrt{2}kC\bar{a}_{//}}\right) \frac{C\bar{a}_\perp^2 H_\perp}{\Omega_a^2} - \frac{k_{//}^2 C\bar{a}_{//}^2}{\omega_a^2} \frac{C\bar{a}_\perp^2 H_\perp}{\omega_a^2-\Omega_a^2} \right] \Phi$$

$$+ \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{C\bar{a}^2} \frac{\omega_a\,\omega_{*a}}{\omega_a^2-\Omega_a^2} \left[1 + \frac{3\tau_a \omega_{*a} \Omega_a^2}{\omega_a(\omega_a^2-4\Omega_a^2)} + \frac{\omega_a^2(1+\tau_a)+\Omega_a^2(3-\tau_a)}{\omega_a^2-\Omega_a^2} k_{//}^2 C\bar{a}_{//}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_a^2-7\Omega_a^2}{\omega_a^2-4\Omega_a^2} \frac{C\bar{a}_\perp^2 H_\perp}{\Omega_a^2} \right] \Phi = 0$$

Lorsque le plasma est collisionnel, mais tel que la fréquence de collision υ_a est petite devant la fréquence cyclotronique Ω_a , l'équation des ondes s'obtient en remplaçant ω_a par $\omega_a + i\upsilon_a$ et ω_{pa}^2 par

$$\frac{\omega_{pa}^2}{1 + \frac{i\upsilon_a}{\sqrt{2}k_{//}Ca} Z\left(\frac{\omega_a+i\upsilon_a}{\sqrt{2}k_{//}Ca_{//}}\right)}$$

Cette équation permet d'étudier toutes les résonnances d'une colonne de plasma inhomogène à β faible, dans l'approximation du second ordre par rapport aux rayons de Larmor. L'établissement d'une équation aussi complète serait très fastidieuse par les moyens classiques.

Nous allons nous limiter à la recherche des modes propres électrostatiques tels que

$$\sqrt{2}\, C_{i_{//}} << \frac{\omega}{k_{//}} << \sqrt{2}\, C_{e_{//}}$$

de sorte que

$$Z\left(\frac{\omega_i}{\sqrt{2}\, k_{//} C_{i_{//}}}\right) \sim i\pi\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega_i^2}{2k_{//}^2 C_{i_{//}}^2}} - \frac{\sqrt{2}k_{//}Ci_{//}}{\omega_i} \left(1 + \frac{k_{//}^2 Ci_{//}^2}{\omega_i^2}\right)$$

Deux types d'onde sont susceptibles de se propager :

- l'onde pseuso-sonore ionique caractérisée par la fréquence $k_{//} C_s$ ($C_s^2 = \frac{kTe_{//}}{m_i}$)

- l'onde de dérive diamagnétique caractérisée par la fréquence $\omega_* = \omega_{*e} = -\frac{m}{r}\frac{n'}{n}\frac{C_{e//}^2}{\Omega_e}$

$$\frac{\omega_{*a}}{\Omega_a} = -\frac{n'}{n}\frac{m}{r}\tau_a \rho_a^2 \qquad \rho_a^2 = \frac{C_{a\perp}^2}{\Omega_a^2}$$

par hypothèse $\left|\frac{\omega_{*a}}{\Omega_a}\right| << 1$

Les résonnances que nous étudions sont donc telles que $\left|\frac{\omega a}{\Omega_a}\right| << 1$

D'où l'équation des ondes basse fréquence :

$$\frac{1 + \frac{\omega_e + i\nu e - \omega_*}{\sqrt{2}\,k_{//} Ce_{//}} \mathcal{Z}\left(\frac{\omega e + i\nu e}{\sqrt{2} k_{//} Ce_{//}}\right)}{1 + \frac{i\nu e}{\sqrt{2} k_{//} C_{e//}} \mathcal{Z}\left(\frac{\omega_e + i\nu e}{\sqrt{2} k_{//} Ce_{//}}\right)} \Phi - \left(\frac{\omega_*}{\omega_i} - \frac{k_{//}^2 C_s^2}{\omega_i(\omega_i + i\nu_i)}\right)(1 + \rho_i^2 H_\perp)\Phi$$

$$-\rho_s^2\left(1 + \frac{i\nu i}{\omega_i}\right) H_\perp \Phi + \lambda \frac{\omega_*}{\omega_i} \frac{k_{//}^2 C_s^2}{(\omega_i + i\nu i)^2}\Phi - i\eta\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega i + i\nu i + \lambda\omega_*}{k_{//} C_s} \frac{e^{-\frac{(\omega_i + i\nu i)^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2}}}{\lambda^{3/2}} \Phi$$

$$- l_{De}^2 \Delta\Phi = 0$$

$\rho_s = \frac{C_s}{\Omega_i}$ Dans l'hypothèse où $l_{De}^2 << \rho_s^2$

($<=> \frac{|\Omega e \Omega i|}{\omega_{pe}^2} << 1$) les fluctuations sont neutres localement

$\lambda = \frac{T_{i//}}{T_{e//}}$

Cette hypothèse est largement satisfaite dans la pratique, ceci nous autorise à négliger le terme

$$l_{De}^2 \quad \Delta\Phi$$

- dans un plasma sans collision la contribution électronique à l'équation d'onde se réduit à

$$(1 + i\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_e - \omega_*}{k C_{e//}}) \Phi \qquad \text{car } Z(\xi) \to i\sqrt{\pi} \text{ lorsque } \xi \to 0$$

- dans un plasma fortement collisionnel ($\nu_e >> k_{//} Ce_{//}$) le terme électronique devient alors :

$$\frac{\omega_* + iDk_{//}^2}{\omega_e + iDk_{//}^2} \Phi$$

car $Z(\xi) \sim -\frac{1}{\xi}(1+\frac{1}{2\xi})$ lorsque $\xi \to \infty$ et $Im(\xi) > 0$

Mais dans un plasma sans collision, il peut exister un gradient de température dont les effets sont importants. Dans l'hypothèse où les ions sont froids, $f_i = \frac{n(r)}{n_o} \delta$, la modification introduite par le gradient de température porte sur le terme électronique, dont l'expression peut être rétablie rapidement à partir d'une distribution de la forme : $f_e = \frac{n(r)}{n_o} \delta_\perp \otimes g_{//}$

avec $g(w_{//}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, C_{e_{//}}(r)} e^{-\frac{w_{//}^2}{2Ce_{//}^2(r)}}$

$$\frac{\delta f_e}{\delta r} = (\frac{n'}{n} - \frac{1}{2}\frac{T'_{e_{//}}}{T_{e_{//}}} + \frac{1}{2}\frac{T_{e_{//}} w_{//}^2}{T_{e_{//}} C_{e_{//}}^2}) f_e$$

On calcule $< \frac{\delta f_e}{\delta r} , \frac{1}{r} \frac{\delta \Phi^*}{\delta \theta} >$

Sachant que $\mathcal{L}_y < \frac{w_{//}^2}{C_{e//}^2} g_{//} ; e^{-ik_{//} w_{//} t} > = -\frac{1}{k_{//}^2 C_{e//}^2} \mathcal{L}_y . \frac{\delta^2}{\delta t^2} < g_{//}, e^{-ik_{//} w_{//} t} >$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2} k_{//} C_{e_{//}}} \frac{\omega^2}{k_{//}^2 C_{e//}^2} Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k_{//} C_{e//}}\right)$$

Le terme électronique s'écrit alors :

$$\left[1 + \frac{\omega_e - \omega_* + \omega_T\left(1 - \frac{\omega_e^2}{k_{//}^2 C_{e//}^2}\right)}{\sqrt{2}\, k_{//} C_{e//}} \mathcal{Z}\left(\frac{\omega_e}{\sqrt{2}\, k_{//} C_{e//}}\right)\right] \Phi$$

où $\omega_T = \frac{m}{r}\,\frac{1}{2}\,\frac{T'}{T}\,\frac{C_e^2}{\Omega_e^2}$

Dans l'approximation basse fréquence il devient :

$$\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_e - \omega_* + \omega_T}{k_{//} C_{e//}}\right) \Phi$$

÷÷÷÷÷÷÷

Il nous faut à présent déterminer le spectre de l'opérateur des ondes pour des profils de densité, de température et de potentiel statique donnés, afin d'établir une équation de dispersion à partir de laquelle nous examinerons la stabilité des modes propres.

Les valeurs propres et les fonctions propres peuvent être déterminées de façon exacte lorsque les profils sont gaussiens, le potentiel statique parabolique.

Dans ce cas les rotations sont uniformes. L'étude de l'instabilité en "flûte" a conduit ROSENBLUTH, KRALL et ROSTOKER (5), puis plus récemment LUC (6), à faire ce calcul. Nous allons retrouver ce spectre par une méthode directe, sans passer par l'équation et les fonctions de WHITTAKER.

On suppose la densité de la forme :

$$n = n_o\, e^{-\frac{r^2}{2r_o^2}}$$

la température = $T = T_o\, e^{-\frac{r^2}{2r_1^2}}$

le potentiel = $U = -U_o\, \frac{-r^2}{2r_2^2}$

L'équation d'onde est de la forme :

$$H_\perp \Phi + a(\omega)\,\Phi = 0$$

où $a(\omega)$ ne dépend pas de r et

$$H_\perp = \frac{\delta^2}{\delta r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_o^2}\right)\frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2}{\delta\theta^2}$$

Les solutions physiques de ce problème sont celles qui correspondent à une énergie finie des fluctuations.

Soit $\int \tilde{n}\,\Phi\,d\tau < \infty$ soit encore $\int \Phi^2 n\,d\tau < \infty$

soit ρ la mesure telle que $d\rho = e^{-\frac{r^2}{2r_o^2}}\,rdr$

Φ appartient à l'espace $L^2_\rho(\mathbb{R}^+)$ des fonctions telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \Phi^2\,d\rho < \infty$$

posons $x = \frac{r^2}{2r_o^2}$, et cherchons les solutions sous la forme $x^\upsilon \phi(x)$.

$$\Phi \in L^2_\rho(\mathbb{R}^+) \iff \phi \in L^2_\mu(\mathbb{R}^+) \quad \text{avec } d\mu = e^{-x}\,x^{2\nu}\,dx$$

$$H_\perp \Phi + a\Phi = 0 \iff x^2\phi'' + (2\nu+1)x\phi' - x^2\phi' - \left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)\phi + \left(a\frac{r_o^2}{2} - \nu\right)x\,\phi = 0$$

On peut prendre $\upsilon = \frac{m}{2}$; on est alors amené à étudier le problème aux valeurs propres dans $L^2_\mu(\mathbb{R}^+)$, où $d\mu = x^m e^{-x}dx$, pour l'opérateur suivant :

$x\,\phi'' + (n+1-x)\,\phi' + \lambda\phi = 0$, avec $\lambda = \dfrac{a\,r_o^2 - m}{2}$

Les polynomes de LAGUERRE d'ordre m, L_n^m, forment un système orthogonal complet dans $L^2_\mu(\mathbb{R}^+)$, solutions du problème aux valeurs propres. A la fonction propre L_n^m est associée la valeur propre $\lambda = n$, entier positif ou nul.

$$L_n^m(x) = \frac{e^x\,x^{-m}}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^{m+n}\,e^{-x})$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} L_p^m\,L_q^m\,d\mu = \frac{C_{p+m}^m}{(m+1)!}\,\delta_{pq}$$

Remarque : $L_n^0 = L_n$ polynome de LAGUERRE ordinaire.

$$\int_{\mathbb{R}^+} L_n L_m d\mu = \delta_{nm} \quad \text{et} \quad \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = t^n L_n(x)$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^n e^{-x}) \qquad d\mu = e^{-x}\,dx$$

Les valeurs propres sont donc telles que $n = \dfrac{a\,r_o^2 - m}{2}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m + 2n}{r_o^2}$$

Dans l'espace $L^2_\rho(\mathbb{R}^+)$, $H_\perp$ admet donc un spectre discret de valeurs propres réelles négatives $(-k_\perp^2)$, la valeur propre $-k_\perp^2 = -\dfrac{m+2n}{r_o^2}$ est associée à la fonction propre (ou mode normal) :

$$\Phi_{m,n}(r,\theta) = \alpha_{m,n}\left(\frac{r}{\sqrt{2}r_o}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{2r_o^2}\right)\,e^{-im\theta}$$

L'équation de dispersion s'écrit : $a(\omega) + k_\perp^2 = 0$ soit pour

chaque mode : $a(\omega) = \frac{m + 2n}{r_o^2}$.

Remarque : le système de fonctions propres étant complet, la recherche de solutions à variables séparées se trouve justifiée à posteriori.

2.2. Ondes de dérive diamagnétique et ondes pseudo-sonores.

Si on supprime l'effet du mouvement des ions parallèlement au champ magnétique et de leur amortissement soit collisionnel soit Landau, on retrouve les équations établies "localement" en géométrie cartésienne par KADOMTSEV (7) et KRALL (8), à condition d'attribuer à ω_* et $k_\perp^2$ respectivement les valeurs $\frac{m}{r_o^2}\frac{C_{e//}^2}{\Omega e}$ et $\frac{m + 2n}{r_o^2}$ déduites de l'étude en géométrie cylindrique pour un profil gaussien.

Mais P. ROLLAND (9) a mis en évidence l'importance de ces effets sur la stabilité de l'onde de dérive; il est donc intéressant de les étudier de façon détaillée et d'en tirer des conclusions en vue de l'expérience. En particulier, des calculs numériques ont été effectués à partir des paramètres de l'expérience Phaéton.

2.2.1. Discussion de la stabilité en régime non collisionnel.

$\upsilon_a \ll k_{//} C_{a//}$ - L'absorption Landau est prépondérante sur la dissipation collisionnelle.

L'équation de dispersion s'écrit alors :

$$1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega+\omega_T - \omega_{de} - k_{//}\upsilon_o - \omega_*}{k_{//} C e_{//}} + k_\perp^2\rho_s^2 - \left(\frac{\omega_*}{\omega-\omega_{di}} + \frac{k_{//}^2 C_s^2}{(\omega-\omega_{di})^2}\right)(1-k_\perp^2\rho_i^2)$$

$$-\lambda \frac{\omega_* k_{//}^2 C_s^2}{(\omega-\omega_{di})^3} + i\eta\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega-\omega_{di}+\lambda\omega_*}{k_{//} C_s} \lambda^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_{di})^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2}\right] = 0$$

a) $\omega_* >> k_{//} C_s$ $\Rightarrow$ ω de l'ordre de ω_*

On obtient alors des ondes de dérive liées au diamagnétisme, ayant une propagation azimuthale. Lorsqu'elles sont instables, ces ondes s'accompagnent donc d'une diffusion anormale.

S'il existe un gradient de température non négligeable, $\omega_T = -\frac{m}{2 r_i^2} \frac{C_{e//}^2}{\Omega_e}$, son effet est prépondérant

$$\omega \simeq \omega_* + \omega_{di} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{k_{//} C_{e//}} (\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o - \omega_T)$$

Cette onde est instable lorsque $\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o - \omega_T > 0$

Le champ électrique radial engendre un effet Doppler sans conséquence pour la stabilité, étant donné qu'il imprime une même rotation aux électrons et aux ions.

Les rotations donnent naissance à des forces centrifuges qui font que $\omega_{de} - \omega_{di} < 0$, les ions étant plus lourds que les électrons. Mais cet effet d'inertie est très faible (du 3è ordre par rapport au rayon de Larmor); il est nettement insuffisant pour stabiliser l'onde.

En revanche, comme nous le verrons ultérieurement, il est possible de rendre $\omega_{de} - \omega_{di}$ notoirement négatif en appliquant un gradient de pression électromagnétique contraire au gradient de pression cinétique, et ainsi de stabiliser l'onde.

Le courant u_o, parallèle au champ magnétique, ne fait que renforcer l'instabilité de dérive diamagnétique.

Lorsque le gradient de température est négligeable (en pratique r_1 très grand devant r_o), il faut extraire la racine de façon plus précise :

$$\omega \simeq \omega_* + \omega_{di} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{k_{//} C_{e//}} \left[\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o \right.$$

$$\left. + \omega_* (1+\lambda) \left(k_\perp^2 \rho_s^2 - \frac{k_{//}^2 C_s^2}{\omega^2} - \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \lambda^{-3/2} \exp\left(- \frac{\omega_*^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2} \right) \right) \right]$$

Lorsque les courants azimuthaux et axiaux sont négligeables, il demeure une instabilité dûe uniquement en diamagnétisme :

$$\omega \simeq \omega_* + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*^2}{k_{//} C_{e//}} (1+\lambda) \left(k_\perp^2 \rho_s^2 - \frac{k_{//}^2 C_s^2}{\omega_*^2} - \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{e^{-\frac{\omega_*^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2}}}{\lambda^{3/2}} \right)$$

Il y a instabilité si $\quad k_\perp^2 \rho_s^2 - \frac{k_{//}^2 C_s^2}{\omega_*^2} - \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{e^{-\frac{\omega_*^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2}}}{\lambda 3/2} > 0$

Cette inégalité impose des contraintes sur les dimensions du plasma en fonction du champ magnétique.

b) $\omega_* << k_{//} C_s \quad \Rightarrow \quad \omega \sim k_{//} C_s$ (c'est le cas, évidemment, du mode m = o)

On obtient l'onde pseudo-sonore qui se propage parallèlement au champ magnétique. Elle peut être rendue instable par le courant axial, mais cette instabilité ne s'accompagne pas de diffusion anormale.

$$\omega \simeq k_{//} C_s + i \frac{k_{//} Cs}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u_o - Cs}{C_{e//}} - \frac{e^{-\frac{1}{2\lambda}}}{\lambda^{3/2}} \right)$$

L'instabilité a lieu lorsque le courant dépasse la vitesse pseudo-sonore des ions :

$$u_o > C_s + C_e \frac{e^{-\frac{1}{2\lambda}}}{\lambda^{3/2}}$$

2.2.2. Discussion de la stabilité en régime collisionnel.

$\upsilon_e >> k_{//} C_{e//}$ - Pour les électrons, la dissipation de type collisionnel est prépondérante.

$D = \dfrac{C_{e//}^2}{\upsilon_{e//}}$ est le coefficient de diffusion des électrons.

L'équation de dispersion prend la forme suivante :

$$\frac{\omega_* + iDk_{//}^2}{\omega - \omega_{de} - k_{//} u_o + iDk_{//}^2} - \left(\frac{\omega_*}{\omega - \omega_{di}} + \frac{k_{//}^2 C_s^2}{(\omega - \omega_{di})(\omega - \omega_{di} + i\nu i)} \right) (1 - k_\perp^2 \rho_i^2)$$

$$- \lambda \frac{\omega_*}{\omega - \omega_{di}} \frac{k_{//}^2 C_s^2}{(\omega - \omega_{di} + i\nu i)^2} + k_\perp^2 \rho_s^2 \left(1 + \frac{i\nu i}{\omega - \omega_{di}} \right) +$$

$$\left(1 + i \frac{\nu i}{(\omega - \omega_{di})}\right) i\eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - \omega_{di} + i\nu i + \lambda\omega_*}{k_{//} C_s} \lambda^{-3/2} e^{-\frac{(\omega - \omega_{di} + i\nu i)^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2}} = 0$$

a) $\omega_* >> k_{//} C_s$ (onde de dérive diamagnétique)

• Si $\dfrac{\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o}{D k_{//}^2}$ est de l'ordre de 1 on peut retenir essentiellement la forme suivante pour l'équation de dispersion :

$$\frac{\omega_* + iDk_{//}^2}{\omega - \omega_{de} - k_{//} u_o + iDk_{//}^2} - \frac{\omega_*}{\omega - \omega_{di}} \simeq 0 \Rightarrow \omega \simeq \omega_{di} + \omega_* \left(1 + i \frac{\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o}{Dk_{//}^2}\right)$$

L'instabilité est dûe essentiellement au courant azimuthal et axial.

• Si $\dfrac{\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o}{Dk_{//}^2} << 1$ dans l'hypothèse où $k_\perp^2 \rho_s^2 << 1$

on obtient :

$$\omega = \omega_{di} + \omega_* + i\omega_* \frac{\omega_{de} - \omega_{di} + k_{//} u_o}{Dk_{//}^2} - (1 - \frac{i\omega_*}{Dk_{//}^2}) \omega_* \left[k_\perp^2 \rho_i^2 + k_\perp^2 \rho_s^2 \left(1 + \frac{i\nu i}{\omega_*}\right) \right.$$

$$-\frac{k_{//}^2 C_s^2}{\omega_*(\omega_*+i\nu i)}\left(1+\lambda\frac{\omega_*}{\omega_*+i\nu i}\right)+i\eta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{i\nu i}{\omega_*}\right)\frac{\omega_*(1+\lambda)+i\nu i}{k_{//}C_s\,\lambda^{3/2}}e^{-\frac{(\omega_*+i\nu i)^2}{2\lambda k_{//}^2 C_s^2}}\Bigg]$$

$$+\frac{\nu i}{\omega_*}<<1 \qquad \eta = 1$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_{di}+\omega_*+i\omega_*\frac{\frac{\omega_{de}-\omega_{di}+k_{//}\mu_0}{D\,k_{//}^2}}{-(1-\frac{i\omega_*}{Dk_{//}^2})\omega_*(1+\lambda)\left(k_\perp^2\rho_s^2-\frac{k_{//}^2C_s^2}{\omega_*^2}+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_*}{k_{//}C_s}\lambda^{-3/2}e^{-\frac{\omega_*^2}{2\lambda k_{//}^2C_s^2}}\right)}$$

Cette onde de dérive est stable si :

$$\frac{\omega_{de}-\omega_{di}+k_{//}\mu_0}{\omega_*(1+\lambda)}+k_\perp^2\rho_s^2-\frac{k_{//}^2C_s^2}{\omega_*^2}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Dk_{//}^2}{k_{//}C_s}\lambda^{-3/2}\,e^{-\frac{\omega_*^2}{2\lambda k_{//}^2C_s^2}}\lesssim 0$$

Cette condition diffère peu de celle obtenue en régime non collisionnel.

υ_i non négligeable $\qquad \eta = 0$

$$\omega \simeq \omega_{di}+\omega_*+i\omega_*\frac{\frac{\omega_{de}-\omega_{di}+k_{//}\mu_0}{D\,k_{//}^2}-(1-\frac{i\omega_*}{Dk_{//}^2})\omega_*\left[k_\perp^2\rho_s^2-\frac{k_{//}^2C_s^2}{\omega_*(\omega_*+i\nu i)}\right]}{}$$

La condition de stabilité s'écrit alors :

$$\frac{\omega_{de}-\omega_{di}+k_{//}\mu_0}{\omega_*}+k_\perp^2\rho_s^2-\frac{k_{//}^2C_s^2}{\omega_*^2+\nu_i^2}\left(1+\frac{\nu i Dk_{//}^2}{\omega_*^2}\right)\lesssim 0$$

Les collisions ioniques jouent ici le rôle stabilisant que jouait précédemment l'amortissement Landau.

b) $\omega_* << k_{//}C_s$ (onde pseudo-sonore)

En première approximation on a :

$$\frac{iDk_{//}^2}{\omega-\omega_{di}-(\omega_{de}-\omega_{di})+iDk_{//}^2-k_{//}\mu_o} - \frac{k_{//}^2C_s^2}{(\omega-\omega_{di})(\omega-\omega_{di}+i\nu i)} = 0$$

lorsque $\frac{kCs}{Dk_{//}^2} << 1$ et $\frac{\nu i}{kC_s} << 1$ on obtient la racine approchée suivante :

$$\omega \simeq \omega_{di}+k_{//}C_s\left[1- i\frac{\nu i}{2kC_s} - i\frac{k_{//}C_s-k_{//}\mu_o-(\omega_{de}-\omega_{di})}{2\,D\,k_{//}^2}\right]$$

Cette onde est stable lorsque :

$$\nu_i D\,k_{//}^2 + k_{//}^2C_s^2 - k_{//}C_s(k_{//}\mu_o + \omega_{de} -\omega_{di})> 0$$

En particulier, lorsque $\omega_{de} -\omega_{di} \simeq 0$, le courant déstabilise l'onde pseudo-sonore dès que $\mu_o > C_s\,(1+\frac{m_i\upsilon_i}{m_e\upsilon_e})$

÷÷÷÷÷÷÷

Nous pouvons donc déjà tirer un certain nombre de conclusions de cette étude analytique de la stabilité.

Le phénomène dissipatif, qu'il soit dû aux collisions, lorsque $\upsilon >> k_{//}C$, ou qu'il soit dû à l'effet Landau, lorsque $\upsilon << k_{//}C$, joue toujours le même rôle. Sur les ions il a un effet stabilisant, et l'instabilité n'apparait, pour un champ magnétique donné et un rayon r_o donné, que si la longueur d'onde parallèle est suffisamment grande. Sur les électrons, il est responsable de l'instabilité.

En régime collisionnel comme en régime non collisionnel, le courant axial renforce l'instabilité de dérive diamagnétique, il rend instable l'onde pseudo-sonore lorsque sa valeur dépasse la vitesse pseudo-sonore

$$C_s = \left(\frac{K\ Te}{m_i} \right)^{1/2}$$

Nous allons à présent donner une série de courbes obtenues numériquement à partir des paramètres du plasma de Phaéton (fortement collisionnel) et confronter les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Ces paramètres sont les suivants :

$r_o = 2$ cm

$C_s^2 = 10^9\ m^2$

$D = 10^4\ m^2/s$

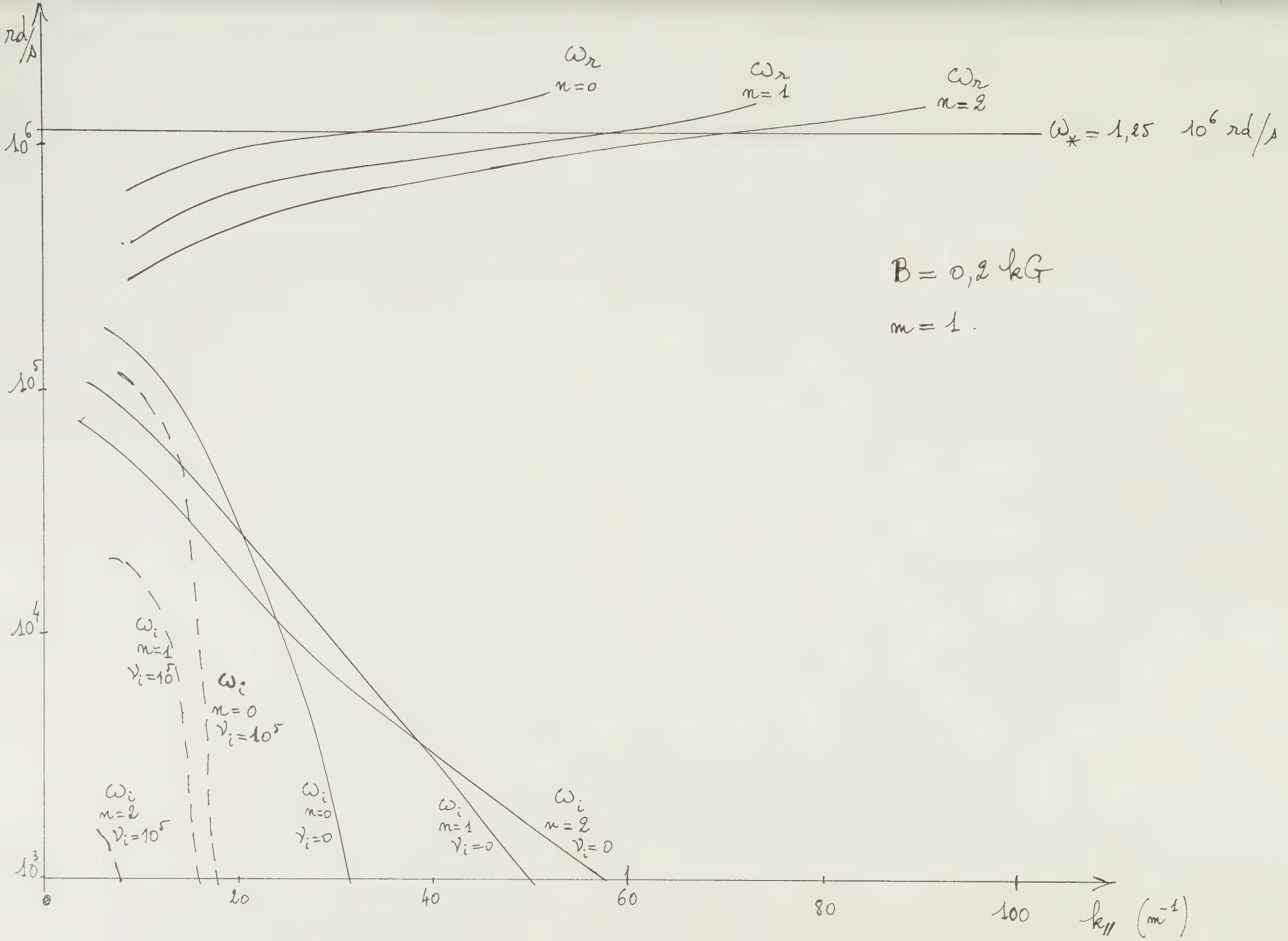
KTe= 10 eV

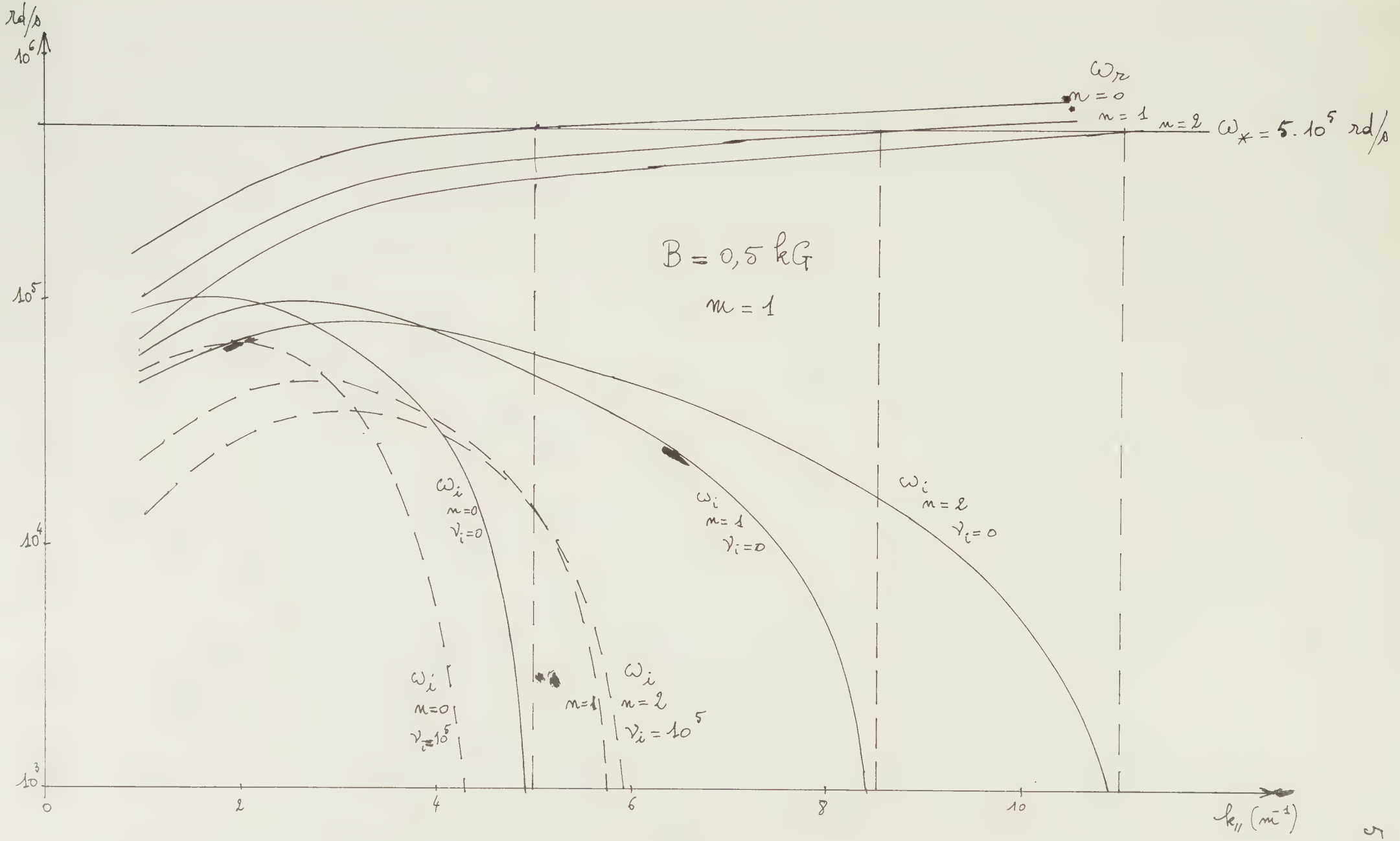
KTi= 0,5 eV

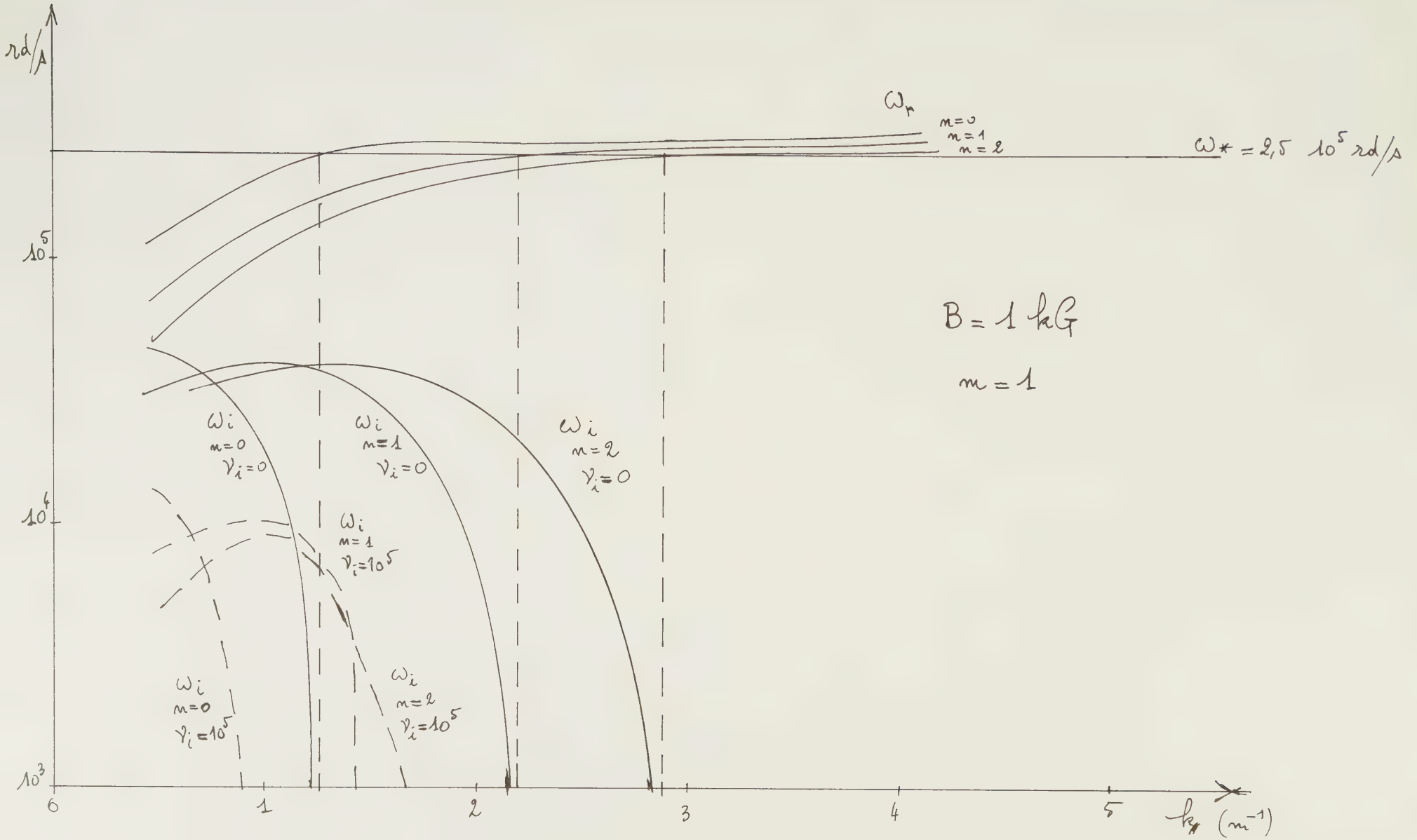
$n = 10^{12} cm^{-3}$

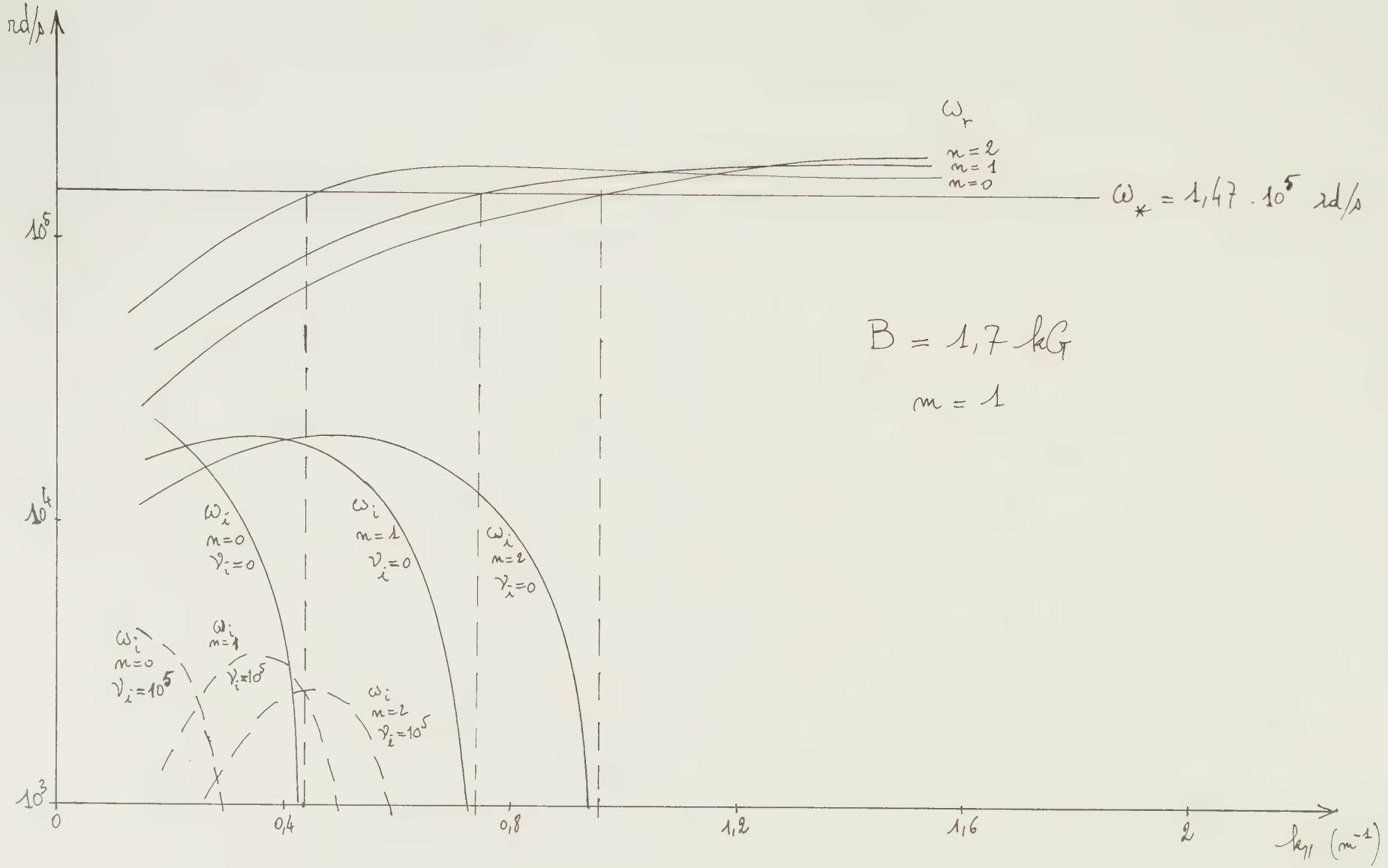
$P_{H2} = 10^{-3}$ torr

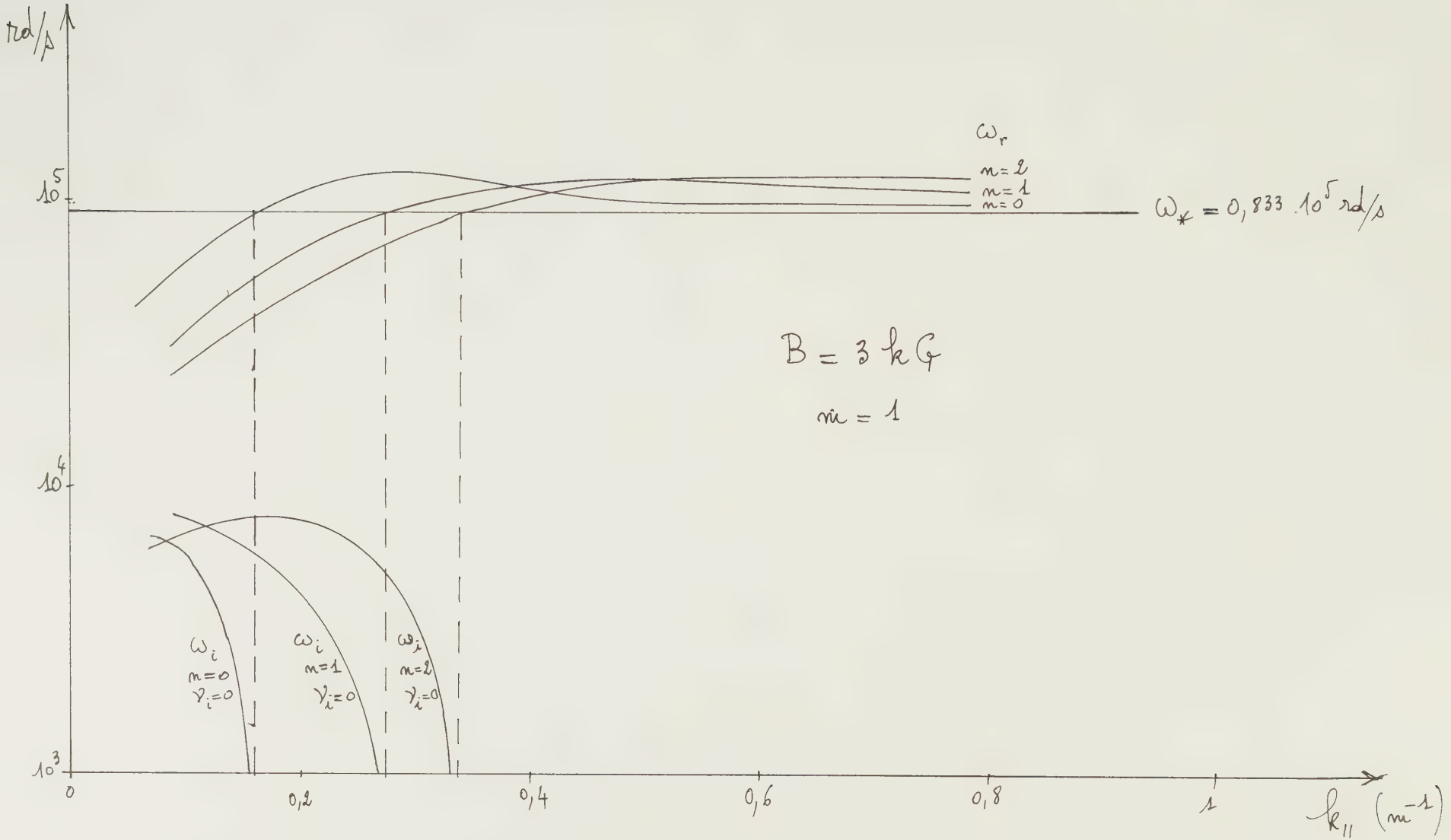
On a tracé la partie réelle et la partie imaginaire de la fréquence, en fonction de $k_{//}$ pour des valeurs différentes du champ magnétique B, de la fréquence de collision υ_i, du nombre azimuthal m et du nombre radial n.

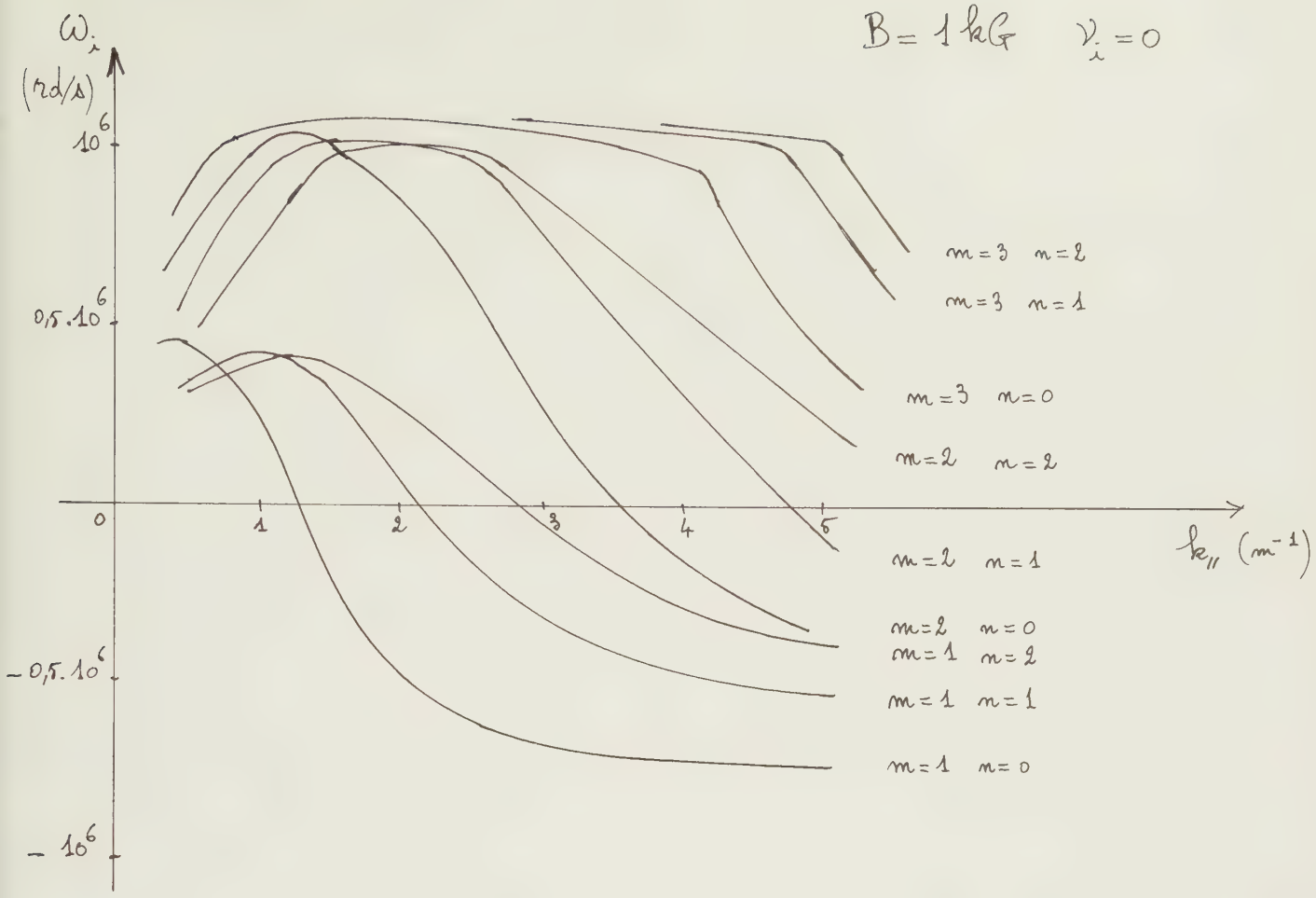

rd/s
10^6
10^5
10^4
10^3
ω_r n=0
ω_r n=1
ω_r n=2
$\omega_* = 1,25\ 10^6$ rd/s
B = 0,2 kG
m = 1.
ω_i n=1 $\nu_i=10^5$
ω_i n=0 $\nu_i=10^5$
ω_i n=2 $\nu_i=10^5$
ω_i n=0 $\nu_i=0$
ω_i n=1 $\nu_i=0$
ω_i n=2 $\nu_i=0$
0
20
40
60
80
100
$k_{//}$ (m^{-1})

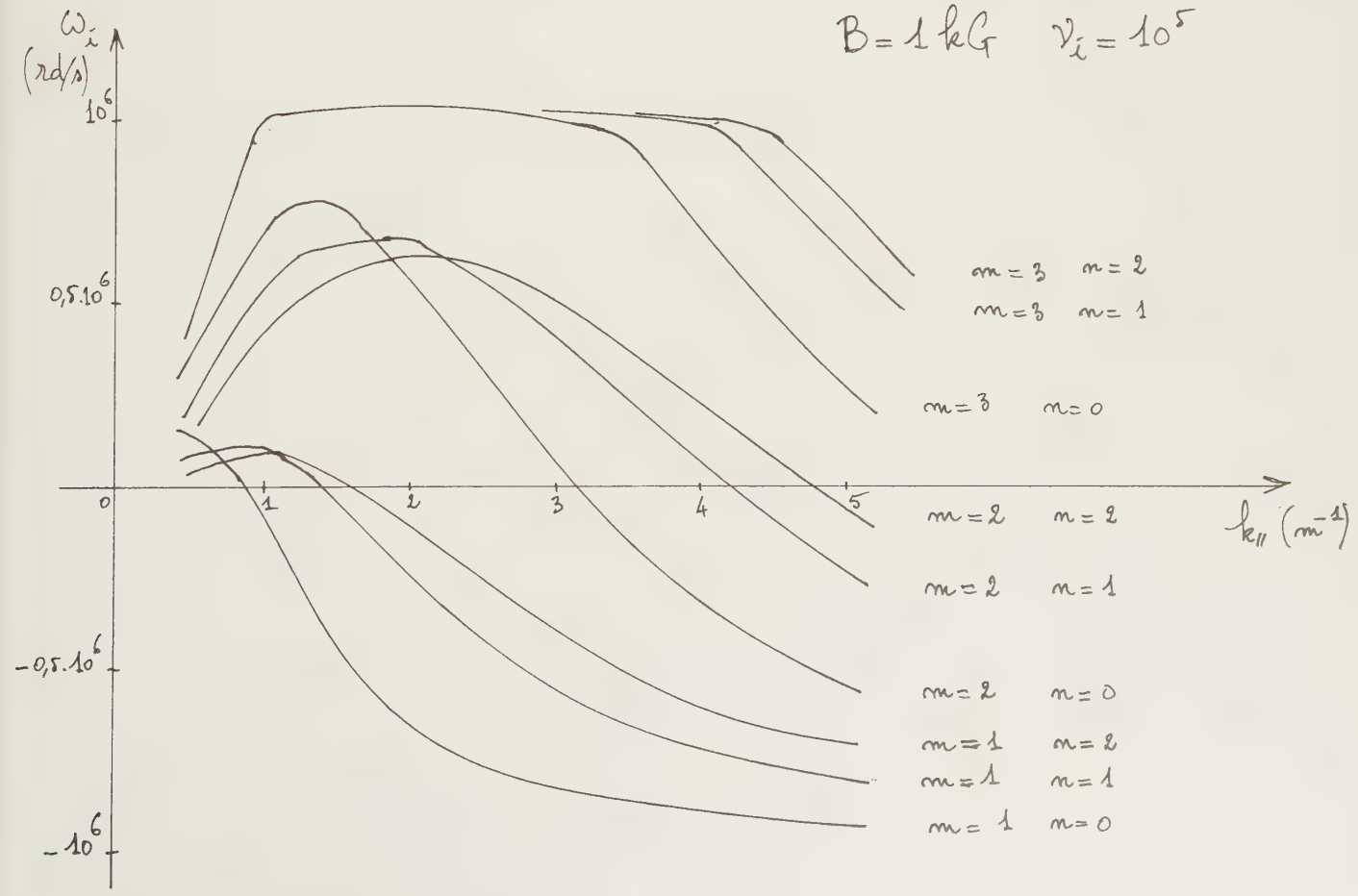

rd/s
10^6
10^5
10^4
10^3
ω_r
$n = 0$
$n = 1$
$n = 2$
$\omega_* = 5.10^5$ rd/s
$B = 0,5$ kG
$n = 1$
ω_i $n=0$ $\nu_i = 0$
ω_i $n=1$ $\nu_i = 0$
ω_i $n=2$ $\nu_i = 0$
ω_i $n=0$ $\nu_i = 10^5$
ω_i $n=1$ $n=2$ $\nu_i = 10^5$
0
2
4
6
8
10
$k_{\parallel}$ (m^{-1})


rd/s
ω_r
m=0
m=1
m=2
$\omega_* = 2{,}5\ 10^5$ rd/s
10^5
10^4
10^3
B = 1 kG
m = 1
ω_i m=0 $\nu_i=0$
ω_i m=1 $\nu_i=0$
ω_i m=2 $\nu_i=0$
ω_i m=1 $\nu_i=10^5$
ω_i m=0 $\nu_i=10^5$
ω_i m=2 $\nu_i=10^5$
6
1
2
3
4
5
k_z (m^{-1})


rad/s
ω_r
n = 2
n = 1
n = 0
$\omega_* = 1,47 \cdot 10^5$ rad/s
10^5
10^4
10^3
B = 1,7 kG
m = 1
ω_i n=0 $\nu_i = 0$
ω_i n=1 $\nu_i = 0$
ω_i n=2 $\nu_i = 0$
ω_i n=0 $\nu_i = 10^5$
ω_i n=1 $\nu_i = 10^5$
ω_i n=2 $\nu_i = 10^5$
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2
$k_{\parallel}$ (m^{-1})


rd/s
10^5
10^4
10^3
ω_r
n=2
n=1
n=0
$\omega_* = 0,833 \cdot 10^5$ rd/s
B = 3 kG
m = 1
ω_i n=0 γ_i=0
ω_i n=1 γ_i=0
ω_i n=2 γ_i=0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
k_{11} (m^{-1})


ω_i (rd/s)
$B = 1\,kG$ $\nu_i = 0$
10^6
$0{,}5.10^6$
$-0{,}5.10^6$
-10^6
0
1
2
3
4
5
$k_{//}$ (m^{-1})
m=3 n=2
m=3 n=1
m=3 n=0
m=2 n=2
m=2 n=1
m=2 n=0
m=1 n=2
m=1 n=1
m=1 n=0


ω_i (rd/s)
$B = 1\,kG$ $\nu_i = 10^5$
10^6
$0{,}5.10^6$
$-0{,}5.10^6$
-10^6
0
1
2
3
4
5
$k_{//}$ (m^{-1})
m=3 n=2
m=3 n=1
m=3 n=0
m=2 n=2
m=2 n=1
m=2 n=0
m=1 n=2
m=1 n=1
m=1 n=0

mode $m = n = 0$

$$x = k_{\parallel} C_s \qquad 2a = \nu_i + \frac{C_s^2}{D} \qquad 2b = \frac{\mu_0}{C_s}\,\frac{C_s^2}{D}$$

$$\omega^2 + 2ia\omega - 2ibx - x^2 = 0$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \Rightarrow \begin{cases} \omega_r - x^2 + a^2 - (\omega_i + a)^2 = 0 \\ \omega_r\,(\omega_i + a) - bx = 0 \end{cases}$$

$$t^2 = \frac{\omega_r^2 + a^2}{\omega_r^2 + b^2} \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{a^2 - b^2 t^2}{t^2 - 1}$$

$$x = \omega_r t \qquad \omega_i + a = bt$$

- $b = 0 \quad 1 \leqslant t < \infty \qquad \omega_i = -a \qquad \omega_r = \sqrt{x^2 - a^2}$

- $a = b \quad t = 1 \qquad \omega_r = x \qquad \omega_i = 0$

- $b < a \qquad 1 \leqslant t \leqslant \frac{a}{b}$

- $b > a \qquad \frac{a}{b} \leqslant t \leqslant 1$

- $a \neq b \neq 0$

$t \to 1 \qquad \omega_r \to \infty \qquad \omega_r \sim x$

$\omega_i \to b - a$

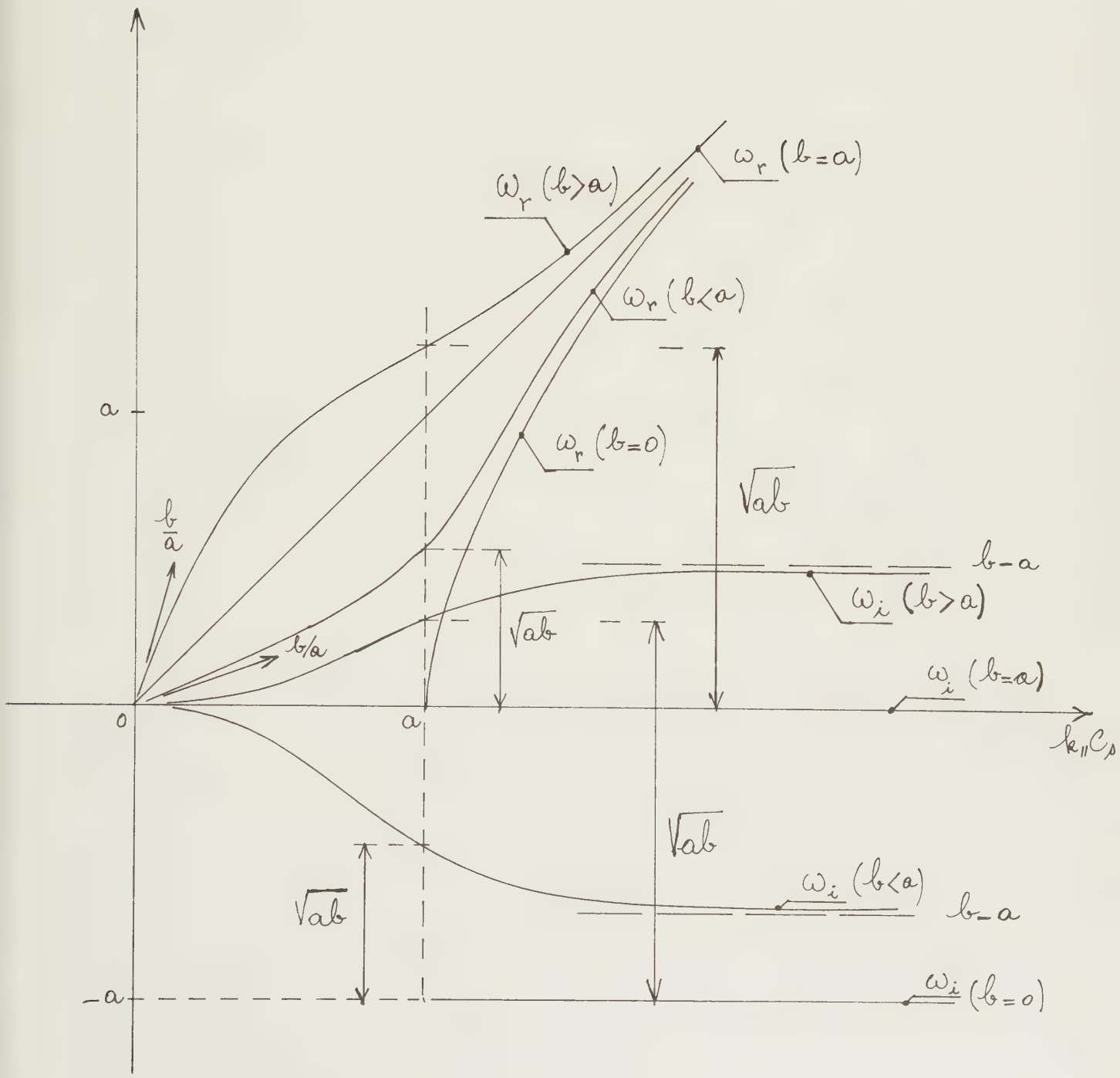
$t \to \frac{a}{b} \qquad \omega_r \to 0 \qquad \omega_r \sim \frac{b}{a} x$

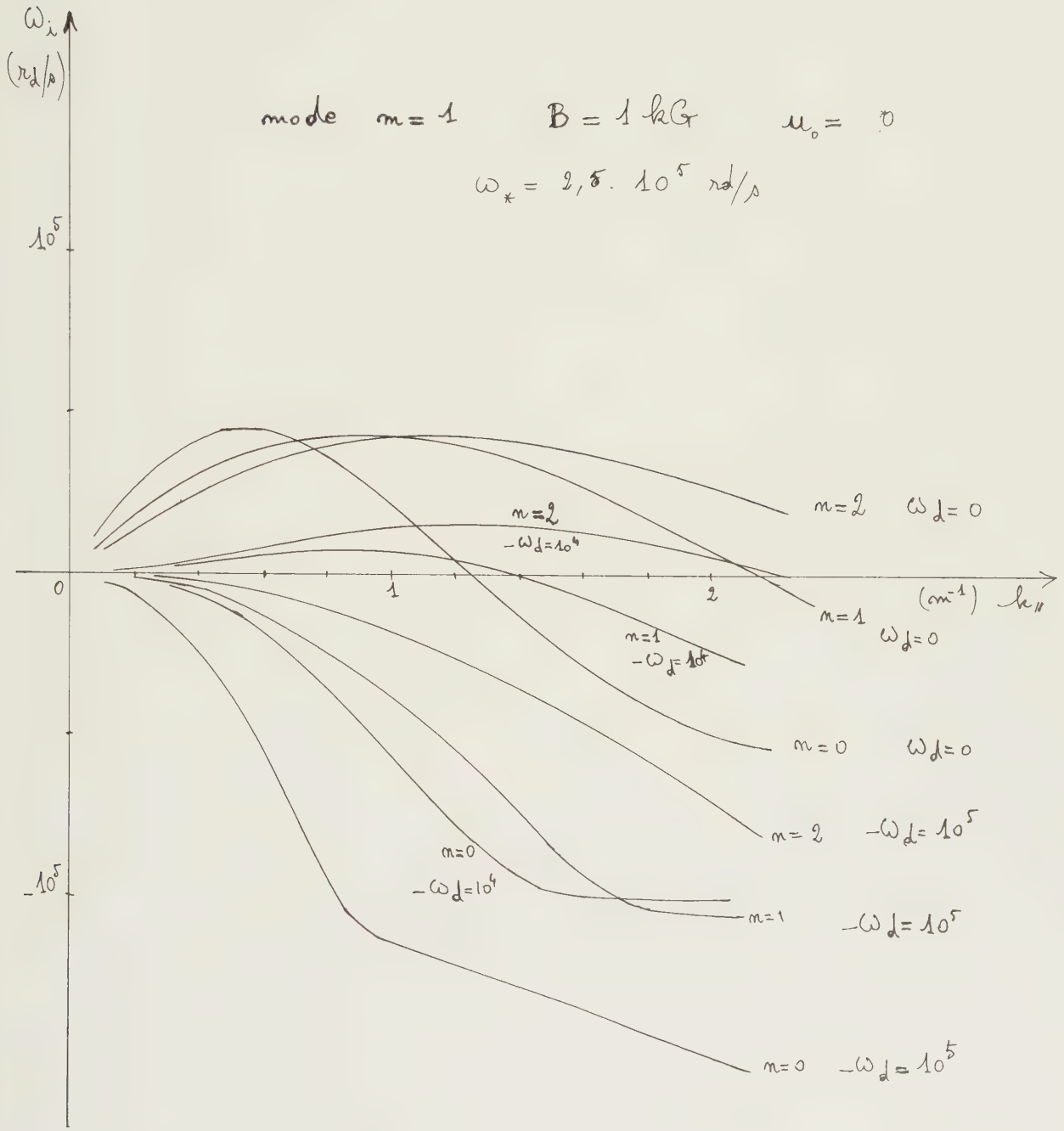
$\omega_i \sim \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{x^2}{4a^2}$

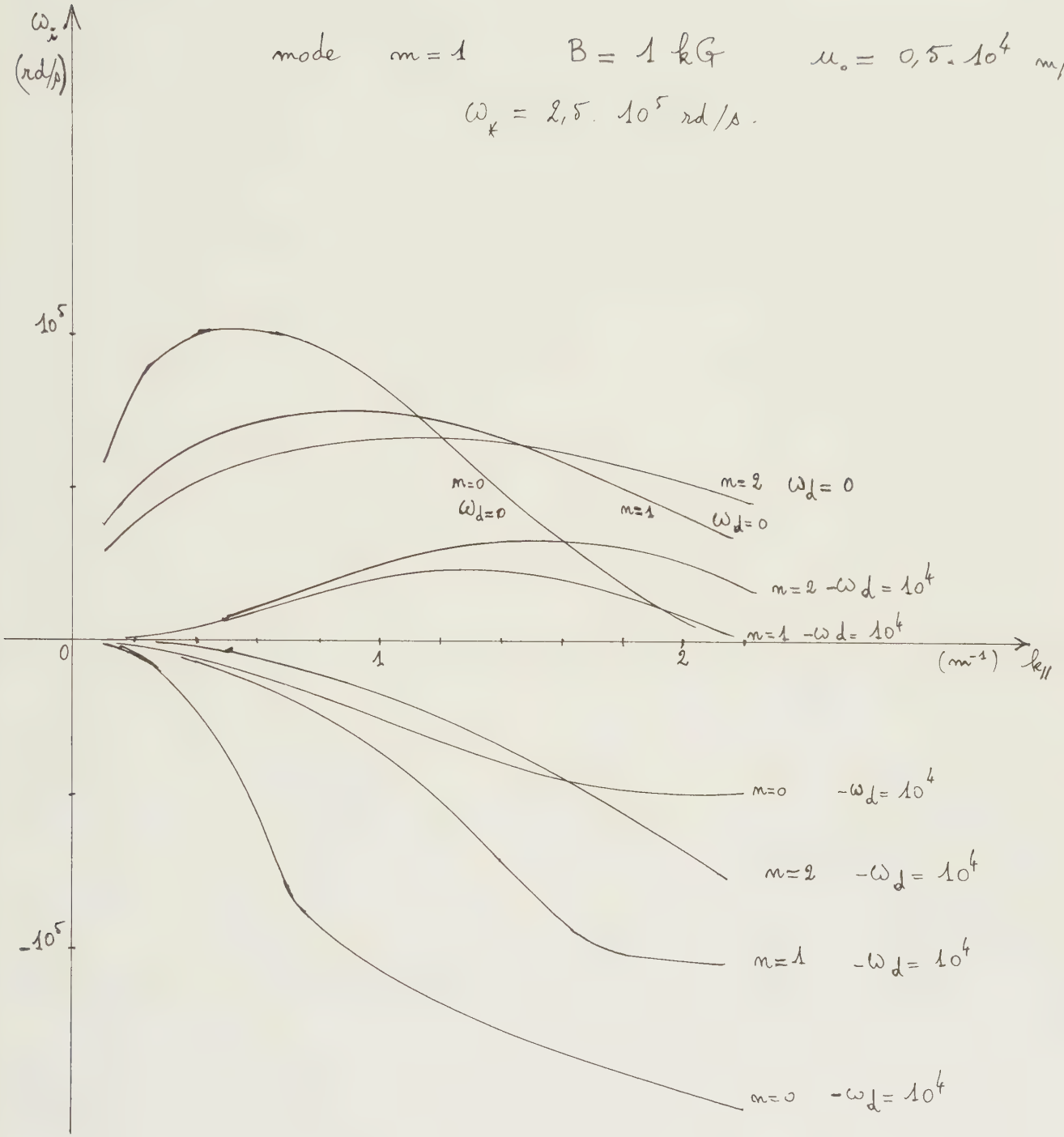
pour $x = a \qquad \omega_r = \omega_i + a = \sqrt{ab}$

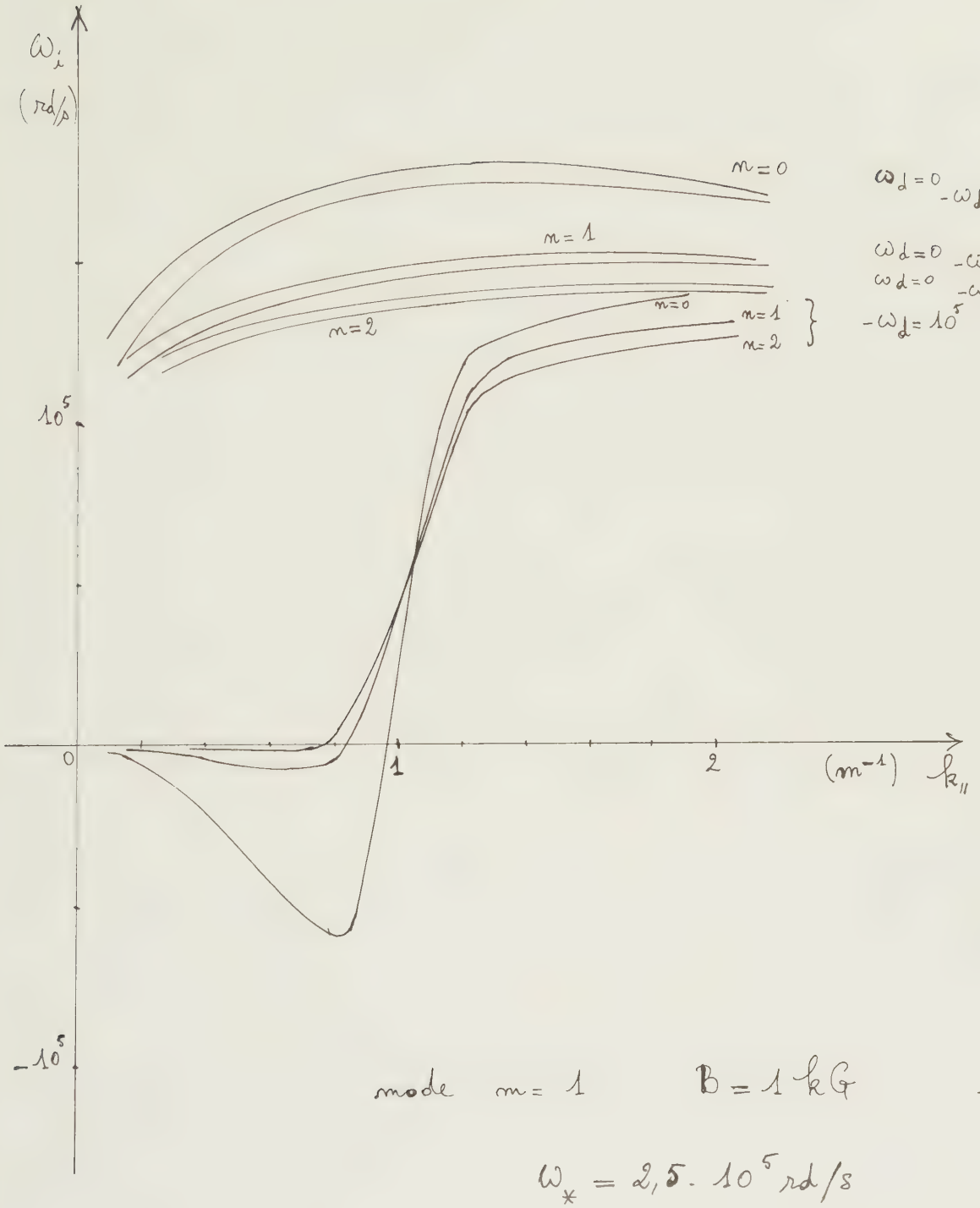
D'où le réseau de courbes suivants

mode $m = n = 0$


$\omega_r\,(b>a)$
$\omega_r\,(b=a)$
$\omega_r\,(b<a)$
$\omega_r\,(b=0)$
a
$\frac{b}{a}$
b/a
$\sqrt{ab}$
$b-a$
$\omega_i\,(b>a)$
$\omega_i\,(b=a)$
0
a
$k_{\parallel}c_p$
$\sqrt{ab}$
$\omega_i\,(b<a)$
$b-a$
$\sqrt{ab}$
$-a$
$\omega_i\,(b=0)$


ω_i
$(r_d/_s)$
mode $m = 1$ $B = 1\ kG$ $u_o = 0$
$\omega_* = 2{,}5 \cdot 10^5\ rd/_s$
10^5
-10^5
0
1
2
(m^{-1}) $k_\parallel$
$n=2$ $\omega_d = 0$
$n=2$ $-\omega_d = 10^4$
$n=1$ $\omega_d = 0$
$n=1$ $-\omega_d = 10^4$
$n=0$ $\omega_d = 0$
$n=2$ $-\omega_d = 10^5$
$n=0$ $-\omega_d = 10^4$
$n=1$ $-\omega_d = 10^5$
$n=0$ $-\omega_d = 10^5$


mode m = 1 B = 1 kG $u_0 = 0,5 \cdot 10^4$ m/s
$\omega_* = 2,5 \cdot 10^5$ rd/s.
ω_i (rd/s)
10^5
-10^5
0
1
2
(m^{-1})
$k_{//}$
m=0 $\omega_d=0$
m=1
m=2 $\omega_d = 0$
$\omega_d=0$
m=2 $-\omega_d = 10^4$
m=1 $-\omega_d = 10^4$
m=0 $-\omega_d = 10^4$
m=2 $-\omega_d = 10^4$
m=1 $-\omega_d = 10^4$
m=0 $-\omega_d = 10^4$



mode $m=1$ $B=1\,kG$ $u_o=10^5$ m/s

$\omega_* = 2,5 \cdot 10^5$ rd/s

Confrontons ces résultats numériques avec l'expérience.Sur Phaéton, les fluctuations sont étudiées avec des sondes de Langmuir, polarisées de façon à recueillir le courant de saturation ionique, qui est proportionnel à la densité d'ions dans le plasma. On observe le spectre des fluctuations de densité.

Ce spectre est généralement constitué de deux ou trois raies correspondant à des modes propres se propageant azimuthalement : c'est à dire $\omega = m\,\omega_o$ avec m = 1, 2, 3. Le fondamental est compris entre 15 et 30 kHz. L'amplitude des raies varie proportionnellement au gradient de densité en fonction du rayon.

La fréquence de ces raies augmente très légèrement avec le champ magnétique, puis celles-ci disparaissent à partir d'environ 2 kG. Les courbes que nous avons tracées confirment bien ce phénomène. Pour une machine longue de 2 m., nous voyons qu'entre 1,7 et 3 kG il n'y a plus d'instabilité de dérive.

D'autre part, $k_{//}$ étant fixé, bien que ω_* diminue lorsqu'augmente le champ magnétique, ω_r augmente légèrement, puis l'onde devient stable dès que $\omega_r > \omega_*$.

Lorsque $v_i \neq o$, il se passe deux choses : d'abord $v_{i//}$ a pour effet que l'extinction de l'instabilité a lieu avant que ω_r soit égal à ω_* ; ensuite $v_{i\perp}$ a pour effet de limiter le nombre de modes (m, n) instables.

Signalons enfin qu'il était difficile d'obtenir une instabilité de dérive sur Phaéton tant que la machine ne faisait que 1,30 m. de long. A présent qu'elle est rallongée, l'instabilité de dérive est régulièrement

électrique $\tilde{E}_z(r)$ et un champ magnétique $\tilde{B}_\theta(r)$ en quadrature; ou bien un potentiel vecteur $\tilde{A}_\theta(r)$ donnant un champ électrique $\tilde{E}_\theta(r)$ et un champ magnétique $\tilde{B}_z(r)$ en quadrature.

Dans le premier cas $\Pi(r) = \frac{e^2}{4m} \tilde{A}_z^2(r) = \frac{e^2}{4m\Omega_o} \tilde{E}_z^2(r)$

Dans le second cas $\Pi(r) = \frac{e^2 r^2}{4m} \tilde{A}_\theta^2(r) = \frac{e^2 r^2}{4m\Omega_o^2} \tilde{E}_\theta^2(r)$

L'énergie du champ H F étant supposée faible devant celle du plasma et la fréquence Ω_o élevée devant la fréquence de l'onde de dérive, nous pouvons faire l'approximation suivante dans l'équation de VLASOV :

$$\frac{\delta H}{\delta q^i} \frac{\delta f}{\delta p_i} \simeq \frac{\delta \bar{H}}{\delta q^i} \frac{\delta f}{\delta p_i}$$

L'effet de l'oscillation forcée sera l'objet de la seconde partie.

Dans leur mouvement non pertubé, les particules sont alors soumises à une accélération supplémentaire,

$\Gamma_{ar} = - \frac{1}{m_a} \frac{\delta \Pi a}{\delta r}$, qui imprime aux centres guides la rotation supplémentaire :

$$\bar{\omega}_{da} = \frac{1}{q_a B} \frac{1}{r} \frac{\delta \Pi a}{\delta r}$$

Les ions sont pratiquement insensibles à cet effet à cause de leur grande inertie = $\bar{\omega}_{di} \tilde{-} o$

La rotation des électrons est uniforme si

$$\Pi_e = \frac{e^2}{4 m_e \Omega_o^2} E_o^2 \frac{r^2}{r_{HF}^2}$$

$$\Pi_e = \frac{e^2}{4 m_e \Omega_o^2} E_o^2 \frac{r^2}{r^2_{HF}}$$

r_{HF} est une distance caractérisant la décroissance du champ entrant dans le plasma.

Posons : $v_o = \frac{e E_o}{m_e \Omega_o}$ $\qquad \mathcal{E}_{HF} = \frac{1}{4} m_e v_o^2$

$$\Pi_e = \mathcal{E}_{HF} \frac{r^2}{r^2_{HF}} \Rightarrow \bar{\omega}_{de} = - \frac{2 \mathcal{E}_{HF}}{r^2_{HF} eB} < 0$$

On définit donc une fréquence $\omega_{de} = - \frac{2m}{r^2_{HF}} \frac{\mathcal{E}_{HF}}{eB}$

m étant le nombre azimuthal.

La condition de stabilité de l'onde de dérive diamagnétique est :

$$k_{//} \mu_o + \omega_* k_\perp^2 \rho_s^2 < - \omega_{de} = \frac{2m \mathcal{E}_{HF}}{r^2_{HF} e B}$$

or $\qquad \omega_* = \frac{m}{r_o^2} \frac{K Te_{//}}{e B}$

donc quelque soit le régime (collisionnel ou non), l'onde de dérive diamagnétique est stabilisée si

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{k_{//} \mu_o}{\omega_*} + k_\perp^2 \rho_s^2 \right) < \frac{r_o^2}{r^2_{HF}} \frac{\mathcal{E}_{HF}}{KTe_{//}}}$$

Nous pouvons constater que lorsque $r_{HF} \sim r_o$, sachant qu'habituellement $k_\perp^2 \rho_s^2 << 1$, il suffit de peu d'énergie pour stabiliser, pourvu qu'il n'y ait pas trop de courant.

Cet effet a été remarqué par D. LEPECHINSKY, P. ROLLAND et J. TEICHMANN (10), dans le cadre d'une étude de la stabilisation H F à l'aide d'un champ inhomogène.

÷÷÷÷÷÷÷

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE.

Cette étude des ondes électrostatiques basse fréquence telles que $k_{//} \neq 0$, valable lorsque $\beta < \frac{me}{mi}$ (Cf. N.A. KRALL (8)), qui prennent naissance dans un magnétoplasma inhomogène a mis en évidence la compétition de deux types d'onde : l'onde de dérive diamagnétique et l'onde pseudo-sonore. La physique de ces ondes est indépendante de la façon dont se réalise la dissipation.

Lorsque l'onde pseudo-sonore l'emporte sur l'onde diamagnétique ($k_{//} C_s >> \omega_*$), le plasma est stable, sauf si le courant longitudinal dépasse la vitesse pseudo-sonore. Dans ce cas l'instabilité n'est pas dangereuse pour le confinement vu qu'elle se propage axialement, on peut penser qu'elle chauffe les ions.

En revanche lorsque le diamagnétisme est plus important ($k_{//} C_s << \omega_*$), le plasma est instable. L'instabilité se propageant azimuthalement, celle-ci engendre une diffusion anormale; un éventuel courant longitudinal ne fait que l'aggraver.

En effet, à la lumière des calculs que nous avons développés, nous pouvons simplifier le mécanisme de l'onde de la façon suivante :

les électrons obéissent à la loi de BOLTZMANN, à ceci près qu' une dissipation négative accompagne leur faible mouvement parallèle au champ magnétique. Ils compen-

sent les fluctuations du courant diamagnétique par le courant - ne $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$; de sorte que les électrons ne bougent pas perpendiculairement au champ magnétique.

En revanche les ions se déplacent essentiellement en direction perpendiculaire. Ainsi nous avons un courant perpendiculaire porté par les ions :

$$\vec{j}_\perp = ne \left(\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2} + \frac{e}{m_i \Omega_i^2} \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \right)$$

et un courant d'électrons parallèle au champ magnétique, à dissipation négative : $\overline{\vec{j}_{//} \cdot \vec{E}_{//}} \leq 0$

La quasi-neutralité des fluctuations implique que l'échange d'énergie se fait essentiellement entre électrons et ions.

$$\Rightarrow \quad \overline{\vec{J} . \vec{E}} \simeq 0$$

ainsi $\overline{\vec{j}_\perp \cdot \vec{E}_\perp} \simeq - \overline{\vec{j}_{//} \cdot \vec{E}_{//}} \geq 0$

$$\overline{\vec{j}_\perp . \vec{E}_\perp} = \frac{ne}{m_i \Omega_i^2} \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial E_\perp^2}}{\partial t} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{\partial E_\perp^2}}{\partial t} \geq 0$$

Il y a donc instabilité.

Le flux d'ions moyen est non nul en direction radiale.

$$\vec{v}_{ir} \simeq \frac{\vec{E}\theta \times \vec{B}}{B^2} \qquad \Gamma_i = \overline{n \, v_{ir}} = \frac{\overline{\tilde{n} \, E\theta}}{B}$$

$$\frac{\tilde{n}}{n} \simeq \frac{e\Phi}{KTe} \qquad \Gamma i = \frac{n e}{KTeB} \overline{\Phi \, E_\theta} = - \frac{n e}{KTeB} \frac{1}{r} \overline{\Phi \frac{\delta \Phi}{\delta \theta}}$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \theta} = - \frac{m}{\omega_*} \frac{\delta \Phi}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_i = \frac{ne}{KTeB} \frac{m}{r \omega_*} \overline{\Phi \frac{\delta \Phi}{\delta t}}$$

$$\Phi \frac{\delta \Phi}{\delta t} = \frac{\Phi^2}{\tau \upsilon} \qquad \tau = \text{temps de montée de l'instabilité}$$

$$\frac{1}{\tau} = \alpha \frac{\omega_*^1}{k_{//} Ce_{//}} k_\perp^2 \rho_s^2$$

$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en régime non collisionnel

$\alpha = \frac{\nu e}{k_{//} Ce_{//}}$ en régime collisionnel

$$\Gamma_i = -\alpha \frac{k_\perp^2 \rho_s^2}{k_{//} Ce_{//}} \frac{\overline{E_\theta^2}}{B^2} \frac{\delta n}{\delta r}$$

D'où le coefficient de diffusion anormal :

$$\boxed{D_{an} = \alpha \frac{k_\perp^2 \rho_s^2}{k_{//} Ce_{//}} \frac{\overline{E_\theta^2}}{B^2}}$$ (valable lorsque $\omega_r \simeq \omega_*$)

(L'étude détaillée de la saturation de l'onde et de la diffusion anormale a été faite par P. ROLLAND (12)).

La stabilisation de la dérive diamagnétique est donc une question importante. Comme c'était prévisible, nous avons vu qu'un gradient de pression H F contraire au gradient de pression cinétique a un effet stabilisant. Il n'est pas nécessaire pour cela de stopper la rotation diamagnétique, ce qui demanderait beaucoup d'énergie, mais de contrarier le mouvement d'ions responsable du fait que $\vec{J}_\perp \cdot \vec{E}_\perp$ soit positif et qui est représenté par le terme $k_\perp^2 \rho_s^2$ dans les équations de dispersion.

Dans la seconde partie, nous allons voir comment agit une oscillation forcée parallèlement au champ magnétique sur la dérive.

- II -

INTERACTION D'UN CHAMP ELECTRIQUE H F

PARALLELE AUX LIGNES DE FORCES MAGNETIQUES

AVEC LES ONDES B F

Nous avons étudié l'effet d'un gradient de pression électromagnétique sur le stabilité du plasma sans prendre en considération les effets de couplage. J.B. FAINBERG et V.D. CHAPIRO (11), puis récemment D. LEPESCHINSKY et P. ROLLAND (1) ont mis en évidence l'effet stabilisant, sous certaines conditions, du couplage d'un champ électrique H F homogène axial avec l'onde de dérive.

Nous avons repris cette étude sur des bases nouvelles et avons apporté des résultats complémentaires.

Nous présentons d'abord une étude microscopique en régime non collisionnel; puis une étude en régime collisionnel où nous employons tour à tour les équations macroscopiques et l'équation de VLASOV complétée par un terme de KROOK, et comparons les deux théories.

II.1. Etude microscopique en régime non collisionnel.

Considérons un champ éléctrique H F axial appliqué à un plasma sans collision.

L'équation de VLASOV linéarisée s'écrit :

$$D f + \frac{q}{m} E_{HF} \frac{\delta f}{\delta w^3} = \frac{q \tilde{\Phi}_t}{m} \frac{\delta \Phi}{\delta q^i} \frac{\delta f}{\delta w_i}$$

$$D = \frac{\delta}{\delta t} + \frac{\delta H}{\delta p_i} \frac{\delta}{\delta q^i} - \frac{\delta H}{\delta q^i} \frac{\delta}{\delta p_i} \qquad p_i = w_i + \frac{q}{m} A_i$$

H est l'hamiltonien statique, comportant éventuellement une pression électromagnétique inhomogène.

Si f_o est la distribution stationnaire sans H F, la distribution permanente en présence de H F sera

$$\bar{f}\,(q,w,t) = f_o\,(q,u) \quad \text{avec } u = (w_1,\ w_2,\ w_3 - v_o\,\Phi(t))$$

où $$v_o \frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{q}{m} E_{HF}$$

avec les coordonnées (q,μ) l'équation de VLASOV linéarisée s'écrit :

$$D\,\tilde{f} + v_o\phi\,(t)\,\frac{\delta \tilde{f}}{\delta q^3} = \frac{q\tilde{\Phi}t}{m}\,\frac{\delta\Phi}{\delta q^i}\,\frac{\delta f_o}{\delta u_i}$$

Dans le système aux caractéristiques, la H F modifie l'évolution de la coordonnée q^3 :

$$\frac{dq^3}{dt'} = g^{33}\,(u_3 + v_o\,\phi(t')) + \bar{\dot{q}}^3$$

$$q^{3'} - q^3 = g^{33}\left[u_3(t'-t) + v_o\int_t^{t'}\phi(\alpha)\,d\alpha\right] + \bar{\dot{q}}^3\,(t'-t)$$

$$s = t'-t \quad \Rightarrow$$

$$q^{3'} = q^3 - \bar{\dot{q}}^3 s - g^{33}\left[u_3 s + v_o\int_o^s \phi(t-\alpha)\,d\alpha\right]$$

$$\Phi\,(q,u) = \Phi(q',u')$$

L'équation d'onde s'écrit de la même façon, mais Φ^* se trouve modifié par le terme H F $v_o\int_o^s \phi(t-\alpha)\,d\alpha$

$$\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \int_o^t ds\ \tilde{\Phi}(t-s)\ e^{-ikv_{oa}\int_o^s \phi(t-\alpha)\,d\alpha} \qquad U_a(s) = 0$$

où $$U_a(s) = \langle f_a,\ s\Delta_{//}\Phi^* + \frac{\sin\Omega_a s}{\Omega_a}\,\Delta_\perp\Phi^* \rangle$$

$$+ \frac{\sin\Omega_a s}{\Omega_a} \langle \nabla_\perp f_a ; \nabla_\perp \Phi^* \rangle\ s \langle \nabla_{//} f_a ;\ \nabla_{//}\Phi^* \rangle$$

$$+ \frac{1-\cos\Omega a t}{\Omega_a} \langle \{\ \nabla f_a ;\ \nabla \Phi^*\}_{//} \rangle$$

$U_a(s)$ est calculé sans H F comme précédemment.

On remarque qu'en présence de H F l'intégrale sur s n'est plus un produit de convolution.

Choisissons $\phi(t) = \cos \Omega_o t$ posons $\xi = \dfrac{k_{//} v_o}{\Omega_o}$

$$e^{ik_{//}v_o \int_o^s \phi(t-\alpha)\, d\alpha} = e^{i\xi\left[\sin\Omega_o(t-s) - \sin\Omega_o t\right]}$$

$$= \sum_{m,n} J_m(\xi)\, J_n(\xi)\, e^{i(m-n)\Omega_o t - im\Omega_o s}$$

J_m étant la fonction de BESSEL de 1ère espèce d'ordre m.

Faisons la décomposition suivante :

$$\tilde{\Phi}(t) = \sum_p \tilde{\Phi}_p(t)\, e^{ip\Omega_o t}$$

Après identification de chaque composante on obtient le système infini d'équations suivant :

$$\tilde{\Phi}_q(t)\Delta\ \Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \int_0^t ds \sum_{m,n,p} \tilde{\Phi}_p(t-s)\, e^{i(p-m)\Omega_o s}\, J_m(\xi_a) J_n(\xi_a) U_a(s) = 0$$

avec $p + n - m = q$

Cette fois l'intégrale exprime un produit de convolution. Effectuons alors une transformation de LAPLACE :

$$\hat{\Phi}_q(\omega) = \mathcal{L}.\tilde{\Phi}_q(t)$$

Posons $A_1^a(\omega) = \wp_{\cdot y}\, e^{i1\Omega t}\, U_a(t)$

Si $\hat{U}_a(\omega) = \wp_{\cdot y}\, U_a(t)$, alors $A_1^a(\omega) = \hat{U}_a(\omega+1\Omega)$

D'où le système d'équations :

$$\hat{\Phi}_q \Delta \Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \sum_{l,p} J_{q-1}\, J_{p-1}\, (\xi)_a\, A_1^a\, \hat{\Phi}_p = 0$$

Examinons comment se pose le problème mathématiquement.

On est amené à utiliser les espaces de Banach l_1, l_2 et l_∞, espaces de suites $u = \{u_n\}$ tels que

$u \in l_1 \iff \sum_n |u_n| < \infty$

$u \in l_2 \iff \sum_n |u_n|^2 < \infty$

$u \in l_\infty \iff \mathrm{Sup}_n |u_n| < \infty$

Si $u = \{u_n\}$ et $v = \{v_n\}$, on définit :

le produit simple : $uv = \{u_n v_n\}$

le produit de convolution : $u * v = \{\sum_p u_p v_{n-p}\}$

le produit scalaire : $\langle u | v \rangle = \sum_n u_n \bar{v}_n$

Muni du produit scalaire, l_2 est un espace de Hilbert ; la norme d'un vecteur μ est telle que $||u|| = (\langle u|u\rangle)^{1/2}$

e_n étant la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang n qui est égal à 1, le système des suites e_n, où n décrit l'ensemble des entiers relatifs, forme une base normale pour les espaces l_1, l_2 et

l_∞, de plus pour l_2 c'est une base orthonormée.

La suite $J = \{J_m(\xi)\}$ appartient à $l_1 \cap l_2$

La suite $K = \{(-1)^n J_n(\xi)\}$ appartient à $l_1 \cap l_2$

La suite $A^a = \{A_1^a\}$ appartient à l_∞

La suite $\hat{\Phi} = \{\hat{\Phi}_p\}$ appartient à l_2

Le système d'équations peut s'écrire :

$$\hat{\Phi} \Delta \Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 \; J * (A^a \; (K * \hat{\Phi})) = 0$$

Désignons par T l'opérateur tel que

$$T\hat{\Phi} = \hat{\Phi}\Delta\Phi + \sum_a \omega_{pa}^2 J * (A^a \; (K * \Phi))$$

T est un opérateur linéaire continu de l_2

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mode propre, est que T admette une valeur propre nulle.

T est déterminé par les coefficients :

$$\langle T \; e_m | e_n \rangle = \Delta\Phi \; \delta_{mn} + \sum_a \omega_{pa}^2 \sum_1 J_{m-1} \; J_{n-1}(\xi_a) \; A_1^a$$

T est simplement symétrique, mais n'admet pas la symétrie hermitienne; ce n'est donc pas un opérateur autoadjoint

T admet un développement analytique par rapport à ξ

$T = \sum_{p=0}^{\infty} \xi^p T_p$ les T_p sont également des opérateurs linéaires continus de l_2 admettant la symétrie simple.

Nous allons chercher les valeurs propres λ_n et vecteurs propres v_n de T sous forme d'un développement en puissance de ξ , sachant que T_o est diagonal.

$$(T - \lambda_n I)\, v_n = 0 \qquad \lambda_n = \sum_{o}^{\infty} \xi^p \lambda_n^{(p)} \qquad v_n = \sum_{o}^{\infty} \xi^p v_n^{(p)}$$

$$\forall p \,, \sum_{q=o}^{p} S_{p-q}\, v_n^{(q)} = 0 \qquad \text{où } S_{p-q} = T_{p-q} - \lambda_n^{(p-q)} I$$

Pour $p = 0$ on a $S_o \cdot v_n^{(o)} = 0$ soit $(T_o - \lambda_n^{(o)} I)\, v_n^{(o)} = 0$

$\Rightarrow$ $v_n^{(o)}$ est vecteur propre de T_o associé à la valeur propre $\lambda_n^{(o)}$. T_o étant diagonale, $\lambda_n^{(o)} = \langle T_o\, e_n | e_n \rangle$ et $v_n^{(o)} = \mu_n e_n$; μ_n étant un scalaire arbitraire $\neq 0$.

$$\forall p \ \forall m \quad \sum_{q=o}^{p} \langle S_{p-q}\, v_n^{(q)} | e_m \rangle = 0$$

$$\langle \mu_n T_p e_n | e_n \rangle - \lambda_n^{(p)} \mu_n \delta_{nm} + \sum_{q=1}^{p-1} \langle S_{p-q}\, v_n^{(q)} | e_m \rangle + (\lambda_m^{(o)} - \lambda_n^{(o)}) \langle v_n^{(p)} | e_m \rangle = 0$$

$$\lambda_n = \langle T_p\, e_n | e_m \rangle + \frac{1}{\mu_n} \sum_{q=1}^{p-1} \langle S_{p-q}\, v_n^{(q)} | e_n \rangle$$

On suppose que $m \neq n \Rightarrow \lambda_m^{(o)} \neq \lambda_n^{(o)}$

d'où $$v_n^{(p)} = \mu_n^{(p)} e_n + \mu_n \frac{\langle T_p\, e_n | e_m \rangle}{\lambda_n^{(o)} - \lambda_m^{(o)}} e_m + \sum_{m \neq n} \frac{\sum_{q=1}^{p-1} \langle S_{p-q}\, v_n | e_m \rangle}{\lambda_n^{(o)} - \lambda_m^{(o)}} e_m$$

λ_n doit être indépendant des arbitraires $\mu_n^{(p)}$ et v_n ne doit être multiple que de l'arbitraire μ_n

$\Rightarrow \mu_n^{(p)} = 0$ ou μ_n

Si on prend $\mu_n^{(p)} = \mu_n \neq 0$ la série $\{v_n^{(p)}\}$ est divergente . Donc $\mu_n^{(p)} = 0$. Nous choisirons $\mu_n = 1$.

Soit $u_p = T_p e_n + \sum_{q=1}^{p-1} S_{p-q} v_n^{(q)}$

$\lambda_n^{(p)} = \langle \mu_p | e_n \rangle$ et $v_n^{(p)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle u_p | e_m \rangle}{\lambda_n^{(o)} - \lambda_m^{(o)}} e_m$ pour $p \neq 0$

$v_n^{(o)} = e_n$

+ Pour $m \neq n$ $\quad 0 < a \leq |\lambda_n^{(o)} - \lambda_m^{(o)}| \leq b < \infty$

$$|\lambda^{(p)}| < ||u_p|| \qquad ||v_n^{(p)}|| < \frac{1}{a} ||u_p||$$

Si la suite $\{u_p\}$ est sommable, il en est de même des suites $\{\lambda^{(p)}\}$ et $\{v_n^{(p)}\}$.

Soit R_n l'opérateur linéaire de l^2 définit par :

$$v \to R_n v = \sum_{m \neq n} \frac{\langle v | e_m \rangle}{\lambda_n^{(o)} - \lambda_m^{(o)}} e_m$$

R_n est continu car $||R_n v|| < \frac{1}{a} ||v||$

$$v_n^{(p)} = R_n u_p \quad \text{si} \quad p \neq o \quad \text{et} \quad v_n^{(o)} = e_n$$

$$u_p = T_p e_n + \sum_{q=1}^{p-1} \left[T_{p-q} - \langle u_{p-q} | e_n \rangle I \right] o R_n u_q$$

$$\lambda_n^{(p)} = \langle T_p | e_n \rangle + \sum_{q=1}^{p-1} \langle T_{p-q} o R_n u_q | e_n \rangle$$

La convergence de ces séries n'est pas acquise, néanmoins les développements limités sont valables à un ordre quelconque.

Pour cette étude de la stabilisation dynamique nous nous contenterons d'un développement limité au second ordre par rapport à $\xi = \xi_e = \frac{k /\!/ v_o}{\Omega_o}$

$(\xi_i \underset{\sim}{} o)$

$$\langle T\, e_m | e_n \rangle = \Delta\, \Phi\, \delta_{mn} + \sum_a \omega_{pa}^2 \sum_l J_{m-l}\, J_{m-l}\, (\xi_a)\, A_l^a$$

Au second ordre en ξ on a besoin des termes tels que $|m - l| + |n - l| \leqslant 2$

$$\Rightarrow |m-n| \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \frac{m+n}{2} - 1 \leqslant l \leqslant \frac{m+n}{2} + 1$$

$$J_o(\xi) \sim 1 - \frac{\xi^2}{4} \qquad J_1(\xi) \sim \frac{\xi}{2} \qquad J_2(\xi) \sim \frac{\xi^2}{8}$$

$$J_{-1} = -J_1 \qquad J_{-2} = J_2$$

Les valeurs approchées utiles de $J_{m-l} J_{n-l}$ sont présentées dans le tableau suivant :

n \ l	m-2	m-1	m	m+1	m+2
m-2	$\frac{\xi^2}{8}$	$-\frac{\xi^2}{4}$	$\frac{\xi^2}{8}$	0	0
m-1	0	$\frac{\xi}{2}$	$-\frac{\xi}{2}$	0	0
m	0	$\frac{\xi^2}{4}$	$1-\frac{\xi^2}{2}$	$\frac{\xi^2}{4}$	0
m+1	0	0	$\frac{\xi}{2}$	$-\frac{\xi}{2}$	0
m+2	0	0	$\frac{\xi^2}{8}$	$-\frac{\xi^2}{4}$	$\frac{\xi^2}{8}$

$$T_o\, e_n = \left(\Delta\, \Phi + \sum_a \omega_{pa}^2\, A_n^a \right) e_n = \lambda_n^{(o)}\, e_n$$

$$T_1\, e_n = \frac{\omega_{pa}^2}{2} \left[\left(A_{n-1}^e - A_n^e\right) e_{n-1} + \left(A_n^e - A_{n+1}^e\right) e_{n+1} \right]$$

$$\langle T_2\, e_n | e_n \rangle = \frac{\omega_{pe}^2}{4} \left(A_{n-1}^e + A_{n+1}^e - 2\, A_n^e\right)$$

$$\lambda_n^{(1)} = \langle T_1\, e_n | e_n \rangle = 0$$

$$\lambda_n^{(2)} = \langle T_2\, en | en \rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\left(\langle T_1\, e_n | e_k \rangle\right)^2}{\lambda_n^{(o)} - \lambda_k^{(o)}}$$

$$\sum_{k \neq n} \frac{\left(\langle T_1\, e_n | e_k \rangle\right)^2}{\lambda_n^{(o)} - \lambda_k^{(o)}} = \frac{\omega_{pe}^2}{4} \left[\frac{\left(A_{n-1}^e - A_n^e\right)^2}{\lambda_n^{(o)} \quad \lambda_{n-1}^{(o)}} + \frac{\left(A_{n+1}^e - A_n^e\right)^2}{\lambda_n^{(o)} \quad \lambda_{n-1}^{(o)}} \right]$$

On obtient alors les valeurs propres au second ordre sous la forme suivante :

$$\lambda_n = \lambda_n^{(o)} - \xi^2 \left(b_n + \frac{a_{n-1}}{\lambda_{n-1}^{(o)} - \lambda_n^{(o)}} + \frac{a_{n+1}}{\lambda_{n+1}^{'o)} - \lambda_n^{(o)}} \right)$$

L'effet de la H F sur les fluctuations est décrit par l'équation de dispersion : $\lambda_o(\omega) = 0$

Si la H F n'excite pas de mode propre, λ_1 et $\lambda_{-1} \neq 0$, et l'équation de dispersion s'écrit :

$$\lambda_o^{(o)}(\omega) - \xi^2 \left(b_o(\omega) + \frac{a_{-1}\,\lambda_{+1}^{(o)} + a_{+1}\,\lambda_{-1}^{(o)}}{\lambda_{+1}^{(o)} \times \lambda_{-1}^{(o)}} \right) = 0$$

Dans le cas des ondes de dérive non collisionnelle avec les hypothèses $|\omega| << \Omega_o$ et $\frac{k_{//} Ce}{\Omega_o} << 1$. cette équation d'onde s'écrit :

$$\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right)\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega - \omega_* - \omega_{de} - k_{//} u_o}{k_{//} Ce_{//}}\right)\Phi + \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{k_{//}^2 C_{e//}^2}{\Omega_o^2}\Phi - \frac{Ce^2 H_\perp \Phi}{\Omega_o^2 - \Omega_e^2}\right)$$

$$- \frac{\xi^2}{4}\,\frac{\alpha_1(\Phi) + \alpha_{-1}(\Phi)}{\alpha_1(\Phi)\,\alpha_{-1}(\Phi)}\,\Phi^2 - \left(\frac{\omega_*}{\omega} + \frac{k_{//}^2 Cs^2}{\omega^2} + \rho_s^2 H_\perp\right)\Phi = 0$$

où $\alpha_1(\Phi) = \frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2}\left(1 - \frac{\Omega_o^2}{\omega_{pe}^2}\right) - \frac{\Omega_o^2}{\Omega_o^2 - \Omega_i^2}\,\frac{\omega_*}{\Omega_o}\Phi + \frac{\Omega_o^2}{\Omega_o^2 - \Omega_e^2}\,\frac{\omega_*}{\Omega_o}\Phi$

$$+ l_{De}^2\,\Delta_\perp\Phi - \frac{Cs^2 H_\perp \Phi}{\Omega_o^2 - \Omega_i^2} - \frac{Ce_{//}^2 H_\perp \Phi}{\Omega_o^2 - \Omega_i^2}$$

$\alpha_{-1}(\Phi)$ s'obtient en changeant Ω_o en $-\Omega_o$.

Nous pouvons encore simplifier ces expressions:

d'une part ξ^2, $\frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2}$ et $\frac{Ce_{//}^2 H_\perp}{\Omega_o^2 - \Omega_o^2}$ étant petits, le terme

$\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2} \Phi - \frac{Ce_{//}^2 H_\perp}{\Omega_o^2 - \Omega_e^2} \Phi \right)$ est négligeable; d'autre part en

nous limitant aux fréquences H F comprises entre Ω_i et ω_{pe}, $\alpha_1 (\Phi)$ et $\alpha_{-1} (\Phi)$ se réduisent à :

$$\alpha_1 (\Phi) \simeq \underline{\alpha}_1 (\Phi) \simeq \alpha \Phi = \left(\frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2} + \frac{k_\perp^2 Cs^2}{\Omega_o^2} - \frac{k_\perp^2 Ce_{//}^2}{\Omega_e^2} \right) \Phi$$

$\alpha (\Omega_o) = 0$ à la résonance hybride inférieure, avec une légère propagation parallèle.

Cette résonance a lieu pour

$$\Omega_o = |\Omega_e \Omega_i|^{1/2} \left(1 + \frac{k_{//}^2 m_i}{k_\perp^2 m_e} \right)^{1/2}$$

En dehors de cette résonance nous pouvons écrire l'équation de dispersion suivante :

$$\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right) \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - \omega_* - \omega_{de} - k_{//} u_o}{k_{//} Ce_{//}}\right) - \frac{\xi^2}{2\alpha} - \frac{\omega_*}{\omega} - \frac{k_{//}^2 Cs^2}{\omega^2} + k_\perp^2 \rho_s^2 = 0$$

(valide lorsque $\Omega_i << \Omega_o << \omega_{pa}$)

Pour que l'onde de dérive soit stabilisée, il suffit que

$$\frac{\xi^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) > k_\perp^2 \rho_s^2 \qquad (u_o = 0)$$

Ceci est réalisable dans la mesure où $k_\perp^2 \rho_s^2 << 1$

par exemple si $\Omega_o^2 = |\Omega_e \Omega_i|$, $\alpha = \frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2}$

l'inégalité précédente devient :

$$\frac{v_o^2}{2\, Ce_{//}^2} > k_\perp^2 \rho_s^2$$

L'énergie cinétique communiquée aux électrons par le champ électrique H F peut donc être plus petite que l'énergie thermique des électrons, et néanmoins suffisante pour stabiliser complètement l'onde de dérive diamagnétique.

II.2. Etude en régime collisionnel. Comparaison entre théorie macroscopique et théorie microscopique.

Notre problème consiste à établir comment le champ électrique H F modifie la perturbation de densité électronique, compte-tenu du fait que les électrons subissent de nombreuses collisions élastiques avec les neutres supposés immobiles. Ce transfert de quantité de mouvement, sans échange d'énergie, est décrit, en théorie macroscopique, par l'introduction du terme $- n_e m_e \upsilon_e \vec{v}_e$ dans l'équation de mouvement, en théorie microscopique, par l'introduction du terme de KROOK

$$-\upsilon_e \left(\tilde{f}_e - \frac{\tilde{n}_e}{n} g_e\right)$$

au second membre de l'équation de VLASOV.

Pour l'étude(sans H F) de l'instabilité de dérive "dissipatrice", les deux théories concordent pour $\frac{k_{//}\ Ce_{//}}{\upsilon_e} \ll 1$. Pour l'étude des effets de couplage avec la H F, nous devrons examiner la validité des deux théories; l'imprécision de la théorie macroscopique vient du terme de pression, l'imprécision de la théorie microscopique vient du terme de KROOK.

Calculons les trois premiers moments du terme de KROOK :

1er moment (continuité) : $- \nu \int (\tilde{f} - \frac{\tilde{n}}{n} g)\, dw = -\nu(\tilde{n} - \tilde{n}) = 0$

2ème moment (mouvement) : $- \nu \int w_{//} (\tilde{f} - \frac{\tilde{n}}{n} g) dw = -\nu\, \tilde{v}_{//}$

3ème moment (énergie) : $-\nu \int w_{//}^2 (\tilde{f} - \frac{\tilde{n}}{n} g)\, dw_{//} = -\nu \left(\int w_{//}^2 \tilde{f} dw_{//} - \tilde{n}\, C_{//}^2 \right)$

Cette dernière contribution devrait être nulle, elle ne l'est pas généralement. Cette erreur introduite par la terme de KROOK en théorie microscopique est faible lorsque la fréquence de collisions est petite devant la fréquence de l'onde. Cette contribution à l'énergie est nulle lorsque la compression est isotherme :

$$\tilde{p}_{//} = m \int w_{//}^2\, \tilde{f}\, dw \simeq \tilde{n}\, kT_{//}$$

Nous allons voir que les électrons subissent axialement une compression isotherme lorsque $\upsilon_e \gg k_{//}\ Ce_{//}$ et $\upsilon_e \gg \omega_{BF}$ et Ω_{HF} .

Comme précédemment, la distribution d'équilibre sans H F est de la forme $f_o = h\, g_\perp\, g_{//}$; la distribution permanente $\bar{f}_t$ en présence de H F est solution de l'équation :

$$D\,\bar{f}_t - \frac{e}{me}\,E_{HF}\,\frac{\delta \bar{f}t}{\delta w_3} = -\,\nu_e\,(\bar{f}_t - f_o) \qquad (1)$$

Le champ H F étant supposé homogène, il n'y a pas de séparation de charges dans le régime permanent.

Parallèlement au champ magnétique, le système aux caractéristiques est le même qu'en régime non collisionnel :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt'}\,w'_{//} = -\dfrac{e}{m_e}\,E_{HF} & E_{HF} = E_o \sin\Omega_o t \\[2ex] \dfrac{dZ'}{dt'} = w'_{//} & v_o = \dfrac{eE_o}{m_e\Omega_o} \end{cases}$$

$$\mu = w_{//} - v_o \cos\Omega_o t = C^{te}$$

$$\begin{cases} Z' = Z + \dfrac{v_o}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s) - \sin\Omega_o t\right] - u\,s \\[2ex] w'_{//} = u - v_o \cos\Omega_o (t-s) & t' = t-s \end{cases}$$

(1) note : cette équation ne tient pas compte de la diffusion normale ($\nu_e \ll \Omega e$)

Mais cette fois, contrairement au régime sans collision, la distribution $\bar{f}_t$ n'est pas invariante :

$$\bar{f}_t = h\, g_\perp \nu_e \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\nu_e s}\, g_{//}(w'_{//})\, ds$$

$$(w'_{//})^2 = u^2 + 2\, u\, v_o \cos\Omega_o\,(t-s) + v_o^2 \cos^2\Omega_o\,(t-s)$$

$$\frac{v_o}{Ce} \ll 1 \Rightarrow g_{//}(w'_{//}) = g_{//}(u)\left[1 - \frac{uv_o}{Ce_{//}^2}\cos\Omega_o\,(t-s) - \frac{v_o^2}{2Ce_{//}^2}\left(1-\frac{u^2}{Ce_{//}^2}\right) + \ldots\right]$$

$$\boxed{\bar{f}_t(w) = f_o(u)\left[1 + \gamma_e \frac{uv_o}{Ce_{//}^2}\frac{\Omega_o \sin\Omega_o t - \nu_e \cos\Omega_o t}{\Omega_e^2 + \nu_e^2} - \frac{v_o^2}{4Ce^2}\left(1-\frac{u^2}{Ce_{//}^2}\right) + \ldots\right]}$$

$$\langle \bar{f}_t, u \rangle = \gamma_e v_o \frac{\Omega_o \sin\Omega_o t - \gamma_e \cos\Omega_o t}{\Omega_o^2 + \nu_e^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{HF} = \langle \bar{f}_t, w \rangle = v_o \frac{\Omega_o^2}{\Omega_o^2 + \nu_e^2}\left(\cos\Omega_o t + \frac{\gamma_e}{\Omega_o}\sin\Omega_o t\right)}$$

Ce résultat est conforme à celui qu'on peut établir avec l'équation de mouvement.

$$\frac{K\,Te}{m_e} = \langle \bar{f}_t,\ u^2 \rangle - (\langle \bar{f}_t,\ u \rangle)^2$$

$$= Ce_{//}^2 + \frac{v_o^2}{2} - \frac{\nu_e^2 v_o^2}{\Omega_o^2 + \nu_e^2} (\Omega_o \sin\Omega_o t - \nu_e \cos\Omega_o t)^2$$

$$\frac{K\,Te_{//}}{m_e} \simeq Ce_{//}^2 + \frac{v_o^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} \frac{\nu_e^2}{\Omega_o^2+\nu_e^2} = Ce_{//}^2 + \frac{v_o^2}{2} \frac{\Omega_o^2}{\Omega_o^2+\nu_e^2}$$

$$\boxed{\frac{K\,Te}{m_e} = Ce_{//}^2 + \frac{v_o^2}{2} \frac{\Omega_o^2}{\Omega_o^2+\nu_e^2}}$$

Cet accroissement de température que donne le calcul ne devrait pas exister; c'est une première illustration du fait que le terme de KROOK ne conserve pas l'énergie. Mais on peut remarquer qu'il disparait lorsque $\upsilon_e >> \Omega_o$.

En outre lorsque $\upsilon_e = 0$, $\bar{f}_t(w) \neq f_o(\mu)$, les termes quadratiques introduits par la H F ne disparaissent pas, ceci est contradictoire avec le résultat établi au châpitre précédent. Nous sommes donc contraints à ne garder que le terme du 1er ordre en $\frac{v_o}{Ce}$ dans le développement des fonctions de distribution permanente et perturbée.

La distribution perturbée $\tilde{f}_e$ est solution de l'équation suivante :

$$D\,\tilde{f}_e = -\frac{e}{m_e} \tilde{\Phi}_t \nabla_q \Phi \cdot \nabla_w \bar{f}_t - \nu_e (\tilde{f}_e - \frac{\tilde{n}_e}{n} f_o) \qquad (1)$$

$$\tilde{f}_e = \int_0^t ds\ e^{-\nu_e s} \left[-\frac{e}{m_e} \tilde{\Phi}_{t-s} (\nabla_q \Phi \cdot \nabla_w \bar{f}_{t-s}) \circ h_s + \nu_e (\frac{\tilde{n}}{n}(t-s)\ f_o) \circ h_s \right]$$

(1) note : comme dans le régime permanent, on a négligé la diffusion normale

$$f_e \simeq \frac{n}{n_o}\,\delta_\perp g_{//}(u)\int_0^t ds\; e^{-\nu_e s - ik_{//}us}\; e^{i\frac{kv_{//o}}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s)\;-\sin\Omega_o t\right]}\;\chi$$

$$\left\{\nu_e\;\frac{\tilde{n_e}}{n}\,(t-s)\left[1-\frac{u\,v_o}{Ce_{//}^2}\cos\Omega_o\,(t-s)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{ie\,\Phi}{m_e Ce_{//}^2}\,\tilde{\Phi}(t-s)\left[\omega_* - k_{//}u + \left(\frac{\omega_* u v_o}{Ce_{//}^2} + k_{//}v_o\left(1-\frac{u^2}{Ce_{//}^2}\right)\right)\nu_e\,\frac{\Omega_o\sin\Omega_o(t-s)-\nu_e\cos\Omega_o(t-s)}{\Omega_o^2+\nu_e^2}\right]\right\}$$

Nous allons calculer les trois premiers moments. Pour cela nous avons besoin de connaitre la valeur des intégrales $I_n = \int_{\mathbb{R}} g\,u^n\,e^{-ik_{//}us}\,du$

$$I_n = \frac{i}{k_{//}}\frac{d}{ds}\,I_{n-1} \qquad \text{et} \qquad I_o = e^{-k_{//}^2 Ce_{//}^2\frac{s^2}{2}}$$

En faisant l'approximation adiabatique

$\frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\max(\upsilon_e,\Omega_o)} \ll 1$, on obtient les résultats suivants :

1) $$\frac{\tilde{n_e}}{n_o} = \langle \tilde{f},\,1\rangle = \frac{n}{n_o}\int_o^t e^{-\nu_e s + i\frac{kv_{//o}}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s)\;-\sin\Omega_o t\right]}$$

$$\left\{\nu_e\;\frac{\tilde{n_e}}{n}(t-s)\left[1-k_{//}^2 Ce_{//}^2\,\frac{s^2}{2}+ik_{//}v_o s\,\cos\Omega_o(t-s)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{i\,e\,\Phi}{m_e Ce_{//}^2}\,\tilde{\Phi}_{t-s}\left[\omega_* + ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s - ikv_{//o}s(\omega_* + ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s)\nu_e\,\frac{\Omega_o\sin\Omega_o(t-s)-\nu_e\cos\Omega_o(t-s)}{\Omega_o^2+\nu_e^2}\right]\right\}$$

2) $$\langle \tilde{f},\,u\rangle = -\frac{n}{n_o}\int_o^t ds\; e^{-\nu_e s + i\frac{k_{//}v_o}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s)-\sin\Omega_o t\right]}\;\chi$$

$$\left\{\nu_e\;\frac{\tilde{n_e}}{n}(t-s)\left[ik_{//}Ce_{//}^2 s + v_o\cos\Omega_o(t-s)\right]\right.$$

$$- \frac{i\, e\, \Phi}{m_e Ce_{//}^2} \tilde{\Phi}_{t-s}\left[i\omega_* \; k_{//}^2 Ce_{//}^2 s + k_{//} Ce_{//}^2 - (\omega_* + 2ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s)\nu_o \nu_e \frac{\Omega_o \sin\Omega_o(t-s) - \nu_e \cos\Omega_o(t-s)}{\Omega_o^2 + \nu_e^2}\right]\Bigg\}$$

$$3)\ \langle \tilde{f},\ u^2 \rangle = \frac{n}{n_o} \int_o^t ds\ e^{-\nu_e s + \frac{ik_{//} v_o}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s) - \sin\Omega t\right]} \chi$$

$$Ce_{//}^2 \Bigg\{ \nu_e \frac{\tilde{n}_e}{n}(t-s) \left[1 - 3\, k_{//}^2 Ce_{//}^2 \frac{s^2}{2} + 3ik\nu_o s \cos\Omega_o(t-s) \right]$$

$$- \frac{i\, e\, \Phi}{m_e Ce_{//}^2} \tilde{\Phi}_{t-s}\Bigg[\omega_* + 3\, ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s - 3\, ik_{//} \nu_o (\omega_* + ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s)\nu_e \frac{\Omega_o \sin\Omega_o(t-s) - \nu_e \cos\Omega_o(t-s)}{\Omega_o^2 + \nu_e^2}$$

$$- 2\, k_{//} \nu_o \nu_e \frac{\Omega_o \sin\Omega_o(t-s) - \nu_e \cos\Omega_o(t-s)}{\Omega_o^2 + \nu_e^2}\Bigg]\Bigg\}$$

Soit $p_{e//}$ la composante axiale du tenseur pression cinétique des électrons; par définition :

$$\frac{p_{e//}}{m_e} = \langle f_e, u^2 \rangle - (\langle f_e, u \rangle)^2$$

$$f_e = \bar{f} + \tilde{f}_e \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{p}_{e//}}{m_e} = \langle \tilde{f}_e, u^2 \rangle - 2 \langle \bar{f}, u \rangle \langle \tilde{f}_e, u \rangle$$

On rappelle que $\langle \bar{f}, \mu \rangle = \upsilon_e V_o \dfrac{\Omega_o \sin\Omega t - \upsilon_e \cos\Omega t}{\Omega_o^2 + \upsilon_e^2}$

+ On obtient un résultat simple dans deux cas limites :

$$\Omega_o \gg \upsilon_e \qquad \text{et} \qquad \Omega_o \ll \upsilon_e$$

1) lorsque υ_e est la plus grande de toutes les fréquences compte-tenu qu'alors

$$\int_o^t e^{-\nu_e s} f(t-s)\, g(s)\, ds \simeq f(t) \int_o^t e^{-\nu_e s} g(s)\, ds$$

nous avons le résultat simple :

$$\frac{\tilde{p}_{e//}}{m_e} \simeq Ce_{//}^2\, n_e^2 \qquad \text{soit} \qquad \tilde{p}_{e//} \simeq \tilde{n}_e K\, Te_{//}$$

la compression est isotherme.

Le terme de KROOK est alors bon, car il conserve l'énergie.

2) lorsque ω(de l'onde) $\ll \upsilon_e \ll \Omega_o$

Pour les composantes basse fréquence, nous avons toujours une compression isotherme, mais pour les

composantes H F l'équation d'état est

$$\tilde{p}_{e_{//}} = 3\,\tilde{n}_e\,K\,Te_{//}$$

La compression est adiabatique avec un coefficient $\gamma = 3$, conforme avec le fait que la compression est unidimensionnelle.

Mais dans ce cas le terme de KROOK ne conserve pas l'énergie. La théorie macroscopique est alors meilleure; néanmoins les deux théories concordent en faisant l'approximation plasma froid pour les composantes haute fréquence.

Avant de commencer de nouveaux calculs, nous pouvons résumer la situation du problème de la façon suivante :

- lorsque $\dfrac{k_{//}\,Ce_{//}}{\upsilon_{e_{//}}} > 1$, l'effet Landau est plus important

et le couplage entre la H F et l'onde basse fréquence est décrit par la théorie faite au chapitre prédédent en régime non collisionnel.

- lorsque $\dfrac{k_{//}\,Ce_{//}}{\upsilon_{e_{//}}} \ll 1$ et $\Omega_o \ll \upsilon_e$, la théorie cinétique avec le terme de KROOK est bonne.

- lorsque $k_{//}\,Ce_{//} \ll \upsilon_e \ll \Omega_o$, la théorie macroscopique est bonne, la théorie microscopique n'est pas meilleure.

a) Cas où $\upsilon_e \gg \Omega_o$

La densité perturbée déduite du calcul microscopique est telle que :

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_o}(t) = \frac{n}{n_o}\int_o^t ds\ e^{-\nu_e s - k_{//}^2 Ce_{//}^2 \frac{s^2}{2}}\ e^{i\frac{kv_{//o}}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s)-\sin\Omega_o t\right]} \times$$

$$\left[1+ik_{//}v_o s\cos\Omega_o(t-s)\right]\left[\nu_e\frac{\tilde{n}_e}{n}(t-s)-\frac{i\,e\,\Phi}{m_e Ce_{//}^2}\tilde{\Phi}(t-s)(\omega_* + ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s)\right.$$

$$\left. e^{i\frac{kv_{//o}}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s)-\sin\Omega_o t\right]}\right]\left[1+ik_{//}v_o s\cos\Omega_o(t-s)\right] \simeq$$

$$1 + ik_{//}v_o\left[\frac{\sin\Omega_o(t-s)-\sin\Omega_o t}{\Omega_o} + s\cos\Omega_o(t-s)\right] \simeq$$

$$1 + i\,k_{//}v_o\left[\frac{\Omega_o(t-s)-\Omega_o t}{\Omega_o} - s\right] \simeq 1$$

Le terme HF est du second ordre en $\frac{\Omega_o}{\nu_e}$

Le champ électrique H F a peu d'effet, il ne peut pas communiquer suffisamment d'énergie cinétique aux électrons par suite des collisions trop nombreuses.

b) Cas où $\upsilon_e \ll \Omega_o$

La densité perturbée déduite du calcul microscopique est telle que :

$$\frac{\tilde{n}_e}{n}(t) = \frac{n}{n_o}\int_o^t ds\ e^{-\nu_e s - \frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{2} s^2}\ e^{i\frac{k_{//}v_o}{\Omega_o}\left[\sin\Omega_o(t-s)-\sin\Omega_o t\right]} \times$$

$$\left[\nu_e\frac{\tilde{n}_e}{n}(t-s) - \frac{i\,e\,\Phi}{m_e Ce_{//}^2}\tilde{\Phi}(t-s)(\omega_* + ik_{//}^2 Ce_{//}^2 s)\right]$$

Le problème se pose formellement de la même manière qu'au chapitre précédent pour le régime non collisionnel. Nous pouvons donc utiliser la même méthode de résolution et obtenir ainsi un résultat tout à fait semblable :

$$\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)\frac{\omega_*+iDk_{//}^2}{\omega-\omega_{de}-k_{//}u_o+iDk_{//}^2}\Phi-\frac{\xi^2\Phi^2}{2\alpha(\Phi)}\left(\frac{\omega_*+iDk_{//}^2}{\omega-\omega_{de}-k_{//}u_o+iDk_{//}^2}\right)^2$$

$$-\left(\frac{\omega_*}{\omega}\Phi+\frac{k_{//}^2Cs^2\Phi}{\omega(\omega+i\nu i)}+\left(1+\frac{i\nu i}{\omega}\right)\rho_s^2H_\perp\Phi\right)=0$$

avec

$$\alpha(\Phi)=\frac{k_{//}^2Ce_{//}^2}{\Omega_o^2}\left(1-\frac{\Omega_o^2}{\omega_{pe}^2}\right)\Phi+l_{De}^2\Delta_\perp\Phi$$

$$-\frac{Cs^2H_\perp\Phi}{\Omega_o^2-\Omega_i^2}-\frac{Ce^2H_\perp\Phi}{\Omega_o^2-\Omega^2}$$

Nous allons confirmer ce résultat par un calcul macroscopique, en utilisant la même méthode que D. LEPESCHINSKY et P. ROLLAND, mais en tenant compte du terme $\vec{v}_{HF}.\nabla\vec{v}$ dans l'équation de mouvement. La distribution des vitesses en présence de H F montre que ce terme est correct, de plus il n'est pas légitime de le négliger devant $\upsilon_e\vec{v}$ dans l'hypothèse où $\Omega_o >> \upsilon_e$.

<u>Calcul macroscopique de l'effet de couplage de la H F sur l'onde de dérive</u>.

Nous utilisons les équations macroscopiques suivantes :

équation de continuité : $\frac{\delta n}{\delta t}+\nabla n\vec{v}=0$

équation de mouvement : $\frac{\delta\vec{v}}{\delta t}+\vec{v}.\nabla\vec{v}+\vec{\vec{\nu}}.\vec{v}-\vec{\Omega}\wedge\vec{v}+\frac{1}{n}\nabla.\vec{\vec{p}}=\frac{q}{m}\left(\vec{E}_{HF}-\tilde{\Phi}_t\nabla\Phi\right)$

équation d'état : $\delta\vec{\vec{p}}=\vec{\vec{\gamma}}.\vec{\vec{p}}\,\frac{\delta n}{n}$

$\vec{\vec{\gamma}}$:"coefficient" d'adiabaticité

équation de Poisson : $\tilde{\Phi}_t \Delta \Phi + \sum_a \frac{n_a q_a}{\varepsilon_o} = 0$

Les tenseurs se décomposent de façon canonique ;

$$\vec{\vec{T}} = T_\perp \left(\vec{\vec{1}} - \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{B^2} \right) + T_{//} \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{B^2}$$

Le régime permanent est caractérisé par les vitesses électroniques suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \vec{v}_{HF}}{\delta t} + \nu_e \vec{v}_{HF} = \dfrac{-e}{m_e} \vec{E}_{HF} & \text{en direction parallèle à } \vec{B}_o \\ \vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_{e\perp} = \dfrac{\nabla_\perp p_\perp}{n m_e} & \text{en direction perpendiculaire à } \vec{B}_o \end{cases}$$

$$(* \ \nu_{e\perp} << \Omega_e)$$

$$\vec{E}_{HF} = E_o \vec{e}_3 \sin \Omega_o t \Rightarrow$$

$$v_{HF} = v_o \frac{\Omega_o^2}{\Omega_o^2 + \nu_e^2} \left(\cos \Omega_o t + \frac{\nu_e}{\Omega_o} \sin \Omega_o t \right)$$

avec $v_o = \dfrac{e E_o}{m_e \Omega_o}$

$\Omega_o >> \nu_e \Rightarrow v_{HF} \simeq v_o \cos \Omega_o t$

$$\vec{v}_{e\perp} = -\frac{\vec{\Omega e}}{\Omega_e^2} \wedge \frac{\nabla_\perp p_\perp}{n m} = -\frac{\vec{\Omega e}}{\Omega_e^2} \wedge \gamma_\perp C e_\perp^2 \frac{\nabla_\perp n}{n}$$

Cette vitesse azimuthale est la vitesse de dérive diamagnétique.

Le régime perturbé est régi par le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \tilde{\vec{v}}}{\delta t} + \vec{v}_o.\nabla \tilde{\vec{v}} + \tilde{\vec{v}}.\tilde{\vec{v}} - \vec{\Omega} \wedge \tilde{\vec{v}} + \vec{\vec{\gamma}}.\dfrac{\vec{\vec{p}}}{m} \nabla\left(\dfrac{\tilde{n}}{n}\right) = -\dfrac{q\tilde{\Phi}}{m} t\nabla\,\Phi \\ \left(\dfrac{\delta}{\delta t} + \vec{v}_o.\nabla\right) \dfrac{\tilde{n}}{n} + \left(\dfrac{\nabla n}{n} + \nabla\right) . \tilde{\vec{v}} = 0 \end{cases}$$

La fréquence cyclotronique des électrons est supposée grande devant les autres fréquences =>

$$\tilde{\vec{v}}_{e_\perp} \simeq -\frac{\vec{\Omega}_e}{\Omega_e^2} \wedge \left(\frac{qe}{m_e} \tilde{\Phi}_t \nabla_\perp \Phi + \gamma_\perp Ce_\perp^2 \nabla_\perp \frac{\tilde{n}_e}{n} \right)$$

En direction parallèle :

$$\left(\nu_{e_{//}} + \frac{\delta}{\delta t} + \vec{v}_o.\nabla\right) \tilde{\vec{v}}_{e_{//}} + \gamma_{//} Ce_{//}^2 \nabla_{//} \frac{\tilde{n}_e}{n} = \frac{q_e \tilde{\Phi}}{m_e} t\,\nabla_{//}\Phi$$

reportant ces vitesses dans l'équation de continuité on obtient :

$$\frac{\delta}{\delta t} + ik_{//}v_o \cos\Omega t_o + \left(\vec{v}_{o_\perp} + \frac{\vec{\Omega}_e}{\Omega_e^2} \wedge \gamma_\perp Ce_\perp^2 \frac{\nabla_\perp n}{n}\right).\nabla_\perp \frac{\tilde{n}}{n} - \frac{q_e \Phi i\omega_* \tilde{\Phi}}{m_e C_{e_{//}}^2} t + ik\tilde{\vec{v}}_{//} = 0$$

$$\omega_* = -\frac{m}{r} \frac{Ce_{//}^2}{\Omega_e} \frac{1}{n} \frac{\delta n}{\delta r}$$

m : nombre azimuthal.

Lorsque le profil est gaussien : $n(r) = n_o\, e^{-\frac{r^2}{2r_o^2}}$

$$\omega_* = \frac{m}{r_o^2} \frac{Ce_{//}^2}{\Omega_e}$$

$$\text{Or} \qquad \vec{v}_{o\perp} + \frac{\vec{\Omega}_e}{\Omega_e^2} \wedge \gamma_\perp Ce_\perp^2 \frac{\nabla_\perp n}{n} = 0$$

$$(\nu_{e_{//}} + \frac{\delta}{\delta t} + \vec{v}_o.\nabla)\, i\, \vec{k}_{//}.\vec{v}_{e_{//}} = \gamma_{//} k_{//}^2 C_{e_{//}}^2 \left(\frac{\tilde{n}_e}{n} + \frac{q_e \tilde{\Phi}_t \Phi}{m_e Ce_{//}^2}\right)$$

$$\Rightarrow (\nu_{e_{//}} + \frac{\delta}{\delta t} + ik_{//} v_o \cos\Omega_o t)\left[(\frac{\delta}{\delta t} + ik_{//} v_o \cos\Omega_o t) - \frac{q_e \Phi}{m_e Ce_{//}^2} i\, \omega_* \tilde{\Phi}_t\right]$$

$$+\gamma_{//} k_{//}^2 Ce_{//}^2 \left(\frac{\tilde{n}_e}{n} + \frac{q_e \Phi_t \Phi}{m_e Ce_{//}^2}\right) = 0$$

+ Posons $\qquad \psi_a = l_D^2 \frac{q_a}{\mathcal{E}_o} \frac{\tilde{n}_a}{n}$

$$\left[(\nu_e + \frac{\delta}{\delta_t})\frac{\delta}{\delta_t} + ik_{//} v_o \cos\Omega_o t\,(\nu_{e_{//}} + 2\frac{\delta}{\delta_t}) - ik_{//} v_o \Omega_o \sin\Omega_o t + k_{//}^2 Ce_{//}^2\right] \Psi_e =$$

$$\left[i\omega_*(\nu_e + \frac{\delta}{\delta t} + ik_{//} v_o \cos\Omega_o t) - k_{//}^2 Ce_{//}^2\right] \tilde{\Phi}_t \Phi$$

+ On décompose alors le potentiel en harmonique de Ω_o

$$\tilde{\Phi}_t = \sum_p \hat{\Phi}_p e^{-i\omega_p t} \qquad \text{avec} \quad \omega_p = \omega + p\Omega_o$$

La première composante électronique est telle que :

$$\left[-\omega_p(\omega_p + i\nu_{e_{//}}) + k_{//}^2 Ce_{//}^2\right] \Psi_{ep} + \frac{k v_o}{2}\left[(\omega_p + \omega_{p-1} + i\nu_e)\, \Psi_{e\,p-1}\right.$$

$$\left. + (\omega_p + \omega_{p+1} + i\nu_e)\, \Psi_{e\,p+1}\right] = \left[\omega_*(\omega_p + i\nu_e) - k_{//}^2 Ce_{//}^2\right] \hat{\Phi}_p \Phi$$

$$- \omega_* \frac{k v_o}{2} \Phi\, (\hat{\Phi}_{p-1} + \hat{\Phi}_{p+1})$$

• Pour les ions le calcul est plus simple en faisant les approximations $v_{io} \tilde{\ll} o$ et $C_i \tilde{\ll} o$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \tilde{\vec{v}}_i}{\delta t} + \vec{v}_i \cdot \tilde{\vec{v}}_i - \vec{\Omega}_i \wedge \tilde{\vec{v}}_i = \dfrac{q_i \tilde{\Phi}}{m_i} \nabla \Phi \\ \dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{\tilde{n}_i}{n}\right) + \left(\dfrac{\nabla n}{n} + \nabla\right) \cdot \tilde{\vec{v}}_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\nu_{i\perp} + \dfrac{\delta}{\delta t}\right) \tilde{\vec{v}}_{i\perp} - \vec{\Omega}_i \wedge \tilde{\vec{v}}_{i\perp} = -\dfrac{q_i}{m_i} \tilde{\Phi}_t \nabla_\perp \Phi \\ \left(\nu_{i//} + \dfrac{\delta}{\delta t}\right) \tilde{\vec{v}}_{i//} = \dfrac{q_i}{m_i} \tilde{\Phi}_t i\vec{k} \Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\vec{v}}_{i\perp p} = \dfrac{q_i}{m_i} \dfrac{\hat{\Phi}_p}{\omega_p^2 - \Omega_i^2} \left[\vec{\Omega}_i \wedge \nabla \Phi - i(\omega_p + i\nu i_\perp) \nabla_\perp \Phi\right] \\ \hat{\vec{v}}_{i//p} = \dfrac{q_i}{m_i} \dfrac{\hat{\Phi}_p}{(\omega_p + i\nu i_{//})} \vec{k}_{//} \Phi \end{cases}$$

On rappelle que $H_\perp = \Delta_\perp + \dfrac{n'}{n} \dfrac{\delta}{\delta r}$

$$-i\omega_p \left(\frac{\hat{n}_i}{n}\right)_p + \frac{q_i}{m_i} \frac{\hat{\Phi}_p}{\omega_p^2 - \Omega_i^2} \left[\frac{\nabla n}{n} \cdot \vec{\Omega}_i \wedge \nabla_\theta \Phi - i(\omega_p + i\nu i_\perp) H_\perp \Phi\right] + \frac{i q_i}{m_i} \hat{\Phi}_p \frac{k_{//}^2 \Phi}{\omega_p + i\nu i_{//}} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_{ip} + \frac{\Omega_i^2 \hat{\Phi}_p}{\omega_p^2 - \Omega_i^2} \left[\frac{\omega_*}{\omega_p} + \left(1 + \frac{i\nu i_\perp}{\omega_p}\right) \rho_s^2 H_\perp\right] \Phi - \frac{k_{//}^2 C_s^2 \hat{\Phi}_p}{\omega_p (\omega_p + i\nu i_{//})} \Phi = 0$$

d'où le système liméaire infini :

$$l_D^2 \Delta \Phi \hat{\Phi}_p + B_p^i \hat{\Phi}_p + \left[1 - \frac{k^2 v_o^2}{4} \frac{1}{\omega_{p+1}(\omega_{p+1}+i\nu_e) - \gamma_{//} k_{//}^2 Ce_{//}^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_{p-1}(\omega_{p+1}+i\nu_e) - \gamma_{//} k_{//}^2 Ce_{//}^2}\right] B_p^e \hat{\Phi}_p$$

$$-\frac{kv_o}{2} \frac{1}{\omega_p(\omega_p+i\nu_e) - \gamma_{//} k_{//}^2 Ce_{//}^2} \left\{\left[(\omega_p+\omega_{p-1}+i\nu_e) B_{p-1}^e + \omega_* \Phi\right] \hat{\Phi}_{p-1}\right.$$

$$\left. + \left[(\omega_p+\omega_{p+1}+i\nu_e) B_{p+1}^e + \omega_* \Phi\right] \hat{\Phi}_{p+1}\right\} = 0 \quad (1)$$

avec $B_p^a = Ce_{//}^2 A_p^a$ Les A_p^a sont les mêmes qu'au chapitre précédent; ce sont, à un coefficient près, les susceptibilités du fluide de particules d'espèces "a" pour les fréquences $\omega + p \Omega_o$.

(1) Remarque : on peut établir plusieurs systèmes d'équations équivalents suivant la façon dont on mène les calculs. P. ROLLAND en a établi un dans un référentiel lié au champ H F. Malheureusement il n'a pas été possible de démontrer l'équivalence des deux systèmes.

Pour p = 0

$$\hat{\Phi}_o \, l_D^2 \Delta\Phi + A_o^i \, \hat{\Phi}_o + \left(1 - \frac{k_{//}^2 v_o^2}{2\,\Omega_o^2}\right) A_o^e \, \hat{\Phi}_o =$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{k_{//} v_o}{i\nu_e (\omega + i D k_{//}^2)} \times \left[(-\Omega_o + i\nu_e)\left(\underline{A}_1^e + \frac{\omega_* \Phi}{-\Omega_o + i\nu_e}\right) \hat{\Phi}_{-1} \right.$$

$$\left. + (\Omega_o + i\nu_e)\left(A_{+1}^e + \frac{\omega_*}{\Omega_o + i\nu_e}\Phi\right) \hat{\Phi}_{+1} \right]$$

$$\simeq \frac{1}{2} \frac{k_{//} v_o}{\Omega_o} A_o^e \left(\hat{\Phi}_1 - \hat{\underline{\Phi}}_1\right)$$

Compte tenu de ce que : $\nu_e << \Omega_o$

Pour p = 1, au 1er ordre en $\xi = \frac{k_{//} v_o}{\Omega_o}$

$$\lambda_1^{(o)} \hat{\Phi}_1 = \frac{1}{2} \frac{k_{//} v_o}{\Omega_o} A_o^e \hat{\Phi}_o$$

avec $\lambda_1^{(o)} = l_D^2 \Delta\Phi + A_1^i + A_1^e$

de même pour p = -1 :

$$\lambda_1^{(o)} \hat{\underline{\Phi}}_1 = -\frac{1}{2} \frac{k_{//} v_o}{\Omega_o} A_o^e \hat{\Phi}_o$$

avec $\lambda_1^{(o)} = l_D^2 \Delta\Phi + \underline{A}_1^i + \underline{A}_1^e$

On a négligé donc les harmoniques de rang -2 et +2 qui auraient introduit des termes du 3ème ordre en

$$\xi = \frac{k_{//} v_o}{\Omega_o}$$

D'où en définitive :

$$l_D^2 \Delta\Phi + A_o^i + \left(1 - \frac{\xi}{2}^2\right) A_o^e - \frac{\xi}{4} (A_{oe})^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^{(o)}} + \frac{1}{\lambda_{-1}^{(o)}}\right) = 0$$

On obtient donc rigoureusement le même résultat; compte-tenu que $\omega_* << \Omega_o$, $\lambda_1^{(o)} \simeq \lambda_{-1}^{(o)} \simeq \alpha(\Phi)$ et $\nu_e << \Omega_o$

$$\alpha(\Phi) = \frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2} \left(1 - \frac{\Omega_o^2}{\omega_{pe}^2}\right) \Phi + l_{De}^2 \Delta \Phi$$

$$- \frac{Cs^2 H_\perp \Phi}{\Omega_o^2 - \Omega_i^2} - \frac{Ce^2 H_\perp \Phi}{\Omega_o^2 - \Omega_e^2}$$

Pour que l'effet de la H F soit stabilisant, il faut que $\alpha(\Phi)$ soit une forme linéaire positive de Φ. Ceci est réalisé lorsque

$$\Omega_i < \Omega_o < \Omega_r << \omega_{pe}$$

Ω_r étant la résonance électrostatique

$\alpha(\Phi)[\Omega_r] = 0$

pour $\Omega_o = \Omega_i$ $\alpha(\Phi) = \infty$

Dans ce domaine nous pouvons simplifier $\alpha(\Phi)$:

$$\alpha(\Phi) \simeq \frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2 \Phi}{\Omega_o^2} - \frac{Cs^2 H_\perp \Phi}{\Omega_o^2} + \frac{Ce_{//}^2 H_\perp \Phi}{\Omega_e^2}$$

$$= \left(\frac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2} + \frac{k_\perp^2 Cs^2}{\Omega_o^2} - \frac{k_\perp^2 Ce^2}{\Omega_e^2} \right) \Phi$$

$$\Omega_r = |\Omega_e \Omega_i|^{1/2} \left(1 + \frac{k_{//}^2 m_i}{k_\perp^2 m_e}\right)^{1/2}$$

Cette approximation de $\alpha(\Phi)$. suppose le plasma dense.

÷÷÷÷÷÷÷

CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE. CRITERE DE STABILITE EN PRESENCE DU CHAMP ELECTRIQUE HAUTE FREQUENCE.

(pour $\nu_e = 0$ et $\nu_e \ll \Omega_o$)

Nous pouvons, à présent, donner une condition suffisante pour que l'onde de dérive diamagnétique soit stable; cette condition est indépendante du régime (collisionnel ou non). Elle s'exprime par l'inégalité suivante :

$$\boxed{\frac{k_{//} u_o}{\omega_*} + k_\perp^2 \rho_s^2 - \frac{k_{//}^2 Cs^2}{\omega_*^2} - \frac{\xi^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < 0}$$

avec $\xi^2 = \dfrac{k_{//}^2 v_o^2}{\Omega_o^2}$ et $\alpha = \dfrac{k_{//}^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2} + \dfrac{k_\perp^2 Cs^2}{\Omega_o^2} - \dfrac{k_\perp^2 Ce_{//}^2}{\Omega_o^2}$

Sachant que $\mathcal{E}_{HF} = \frac{1}{4} m_e v_o^2$ et $\alpha \ll 1$, nous pouvons écrire cette inégalité de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k_{//} u_o}{\omega_*} + k_\perp^2 \rho_s^2 - \frac{k_{//}^2 Cs^2}{\omega_*^2} \right) < \frac{\mathcal{E}_{HF}}{KTe_{//}} \frac{1}{1 + \dfrac{k_\perp^2 m_e}{k_{//}^2 m_i}\left(1 - \dfrac{\Omega_o^2}{|\Omega_e \Omega_i|}\right)}$$

Donc, il suffit de peu d'énergie pour stabiliser, si le courant n'est pas trop fort

$\left(\dfrac{k_{//} \mu_o}{\omega_*}\right) \ll 1$, ainsi que le terme $k_\perp^2 \rho_s^2$.

Le terme introduit par la haute fréquence joue le même rôle que celui introduit par le mouvement des ions parallèlement au champ magnétique ($\frac{k_{//}^2 c_o^2}{\omega^2}$); nous avons montré dans la première partie comment ce terme limite le domaine de l'instabilité de dérive.

Notons que l'oscillation forcée peut avoir autant d'effet que le gradient de pression électromagnétique. Nous avons séparé ces deux effets pour la clarté de l'exposé; ils sont tous les deux stabilisants mais leurs mécanismes sont complétement différents.

÷÷÷÷÷÷÷

CONCLUSION GENERALE.

L'expérience montre effectivement que le champ haute fréquence stabilise. Mais rien ne permet de confirmer le modèle théorique. L'étude de la pénétration du champ électrique dans le plasma pose des difficultés tant au point de vue théorique qu'expérimental.

L'effet que nous observons est-il le fait de la non pénétration du champ (d'où fort gradient de pression H F) ou de sa pénétration (d'où couplage avec l'onde de dérive) ? Et si le champ pénètre, est-il homogène axialement ? Sinon quel est son effet ?

Le champ ionisé de façon sensible, est-ce le processus d'ionisation qui est responsable de la stabilisation ?

De plus le bilan énergétique réel de l'expérience est loin d'être décrit par ce modèle théorique.

Donc beaucoup de questions restent posées, néanmoins nous pouvons espérer que ce travail aura contribué à la compréhension de ce phénomène.

REFERENCES

(1) - D. LEPECHINSKY - P. ROLLAND -
EUR-CEA-FC. 521 (Mai 1969)

(2) - L. SCHWARTZ - "Théorie des distributions" -
Hermann.

(3) - Y. CHOQUET-BRUHAT - "Géométrie différentielle
et systèmes extérieurs" - Dunod.

(4) - D. QUEMADA - "Ondes dans les plasmas" - (1968)
Hermann.

(5) - ROSENBLUTH - KRALL - ROSTOKER - Nuclear Fusion.
(1962) Suppl. Part 1 (p. 143).

(6) - H. LUC - EUR- CEA-FC. 428 (Juin 1967)

(7) - B.B. KADOMTSEV - "Plasma turbulence" - (1965)
Academic Press.

(8) - N.A. KRALL - "Drift waves" - (1968) - Advances in
Plasma Physics.

(9) - P. ROLLAND - EUR-CEA-FC. 525 (1969).

(10)- D. LEPECHINSKY - P. ROLLAND - J. TEICHMANN -
EUR-CEA-FC- 581 (Janvier 1971).

(11)- J.B. FAINBERG - V.D. CHAPIRO -
JETP, 52, 1 (1967).

(12)- P. ROLLAND - Proceedings of the IV European Conf. on
Cont. Fusion and Plasma Phys.
Rome (1970).

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU et PERMIS D'IMPRIMER,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale.